

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ  
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

# **МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОВИХ ПРОЦЕСІВ В ЕНЕРГЕТИЦІ ТА ПРОМИСЛОВОСТІ КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ ЧАСТИНА 1**

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського  
як навчальний посібник для студентів, що навчаються на третьому рівні вищої  
освіти (PhD) за спеціальністю 144 «Теплоенергетика»*

Київ  
КПІ ім. Ігоря Сікорського  
2020

Назва: Навчальний посібник по курсу «Математичне моделювання теплових процесів в енергетиці та промисловості. Частина 1.» [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. третього рівня вищої освіти (PhD) спеціальності 144 «Теплоенергетика» / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: Д.В. Риндюк, – Електронні текстові дані (1 файл: 4,34 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – 69 с.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 4 від 10.12.2020 р.)  
за поданням Вченої ради ТЕФ (протокол № 5 від 30.11.2020 р.)*

Електронне мережне навчальне видання

# **МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОВИХ ПРОЦЕСІВ В ЕНЕРГЕТИЦІ ТА ПРОМИСЛОВОСТІ КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ частина 1**

Укладач: *Риндюк Дмитро Вікторович*, канд. техн. наук, доц.

Відповідальний  
редактор *Сірий О.А.*, канд. техн. наук, доц.

Рецензенти: *Баранюк О.В.*, канд. техн. наук, доц.  
*Соломаха А.С.*, канд. техн. наук, доц.

*Навчальний посібник присвячений аналітичним та обчислювальним методам побудови моделей теплових процесів обладнання теплових та атомних електростанцій. Описано моделі теплообмінників з розподіленими та зосередженими параметрами при просторовому русі робочих середовищ.*

*Посібник базується на науково-методичних роботах А.Р. Аветісяна, А.Ф. Пащенко, Ф.Ф. Пащенко, Г.А. Пікіної, Г.А. Філіппова.*

*Посібник орієнтовано на студентів старших курсів та аспірантів (PhD) технічних університетів, що навчаються за спеціальністю 144 «Теплоенергетика».*

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020

## Зміст

Вступ.....	5
Загальні принципи моделювання .....	6
Основи теорії аналітичних моделей.....	10
Класифікація аналітичних моделей .....	10
Способи представлення моделей.....	12
Етапи створення аналітичних моделей.....	18
Рівняння законів фізики в моделях з розподіленими параметрами.....	20
Рівняння закону збереження речовини (М).....	21
Рівняння закону збереження енергії потоку (Е) .....	22
Рівняння закону збереження кількості руху (Р).....	23
Рівняння закону збереження енергії (теплопровідності) труб .....	24
Моделі з різним ступенем наближення .....	25
Моделі статичного наближення (статичні моделі).....	25
Моделі лінійного наближення (лінійні моделі) .....	26
Рівняння закону збереження речовини.....	27
Рівняння закону збереження енергії .....	27
Моделі з зосередженими параметрами.....	28
Рівняння закону збереження речовини.....	28
Рівняння закону збереження енергії .....	28
Моделі багатоточкового наближення .....	29
Динамічні характеристики моделей теплових процесів потоку .....	31
Динамічні характеристики РП моделі потоку .....	31
Динамічні характеристики точкової ЗП моделі.....	36
Характеристики моделей теплових процесів стінки труб .....	40
Статичні характеристики РП моделі стінки.....	40
Циліндрична стінка.....	40
Плоска стінка.....	41
Динамічні характеристики РП моделі плоскої стінки .....	42
Радіаційний теплообмінник .....	42
Конвективний теплообмінник .....	44

Динамічні характеристики точкової моделі стінки.....	45
Порівняння моделей різного ступеня наближення.....	47
Моделі теплообмінників з розподіленими і зосередженими параметрами ....	49
Узагальнена математична модель теплообмінника.....	49
Методи розв'язку узагальненої моделі .....	54
Моделі статички теплообмінників .....	57
Розподілена статична модель конвективного теплообмінника з однофазними теплоносіями .....	58
Модель статички конвективного теплообмінника із зовнішнім теплоносієм на лінії насичення.....	63
Розподілена статична модель радіаційного теплообмінника .....	65
Висновки .....	67
Список літератури .....	68

## Вступ

Початок історії моделювання можна віднести до витоків самого людства і цивілізацій. Наскальні малюнки, які демонструють події того далекого часу, можна назвати першою «моделлю». З ростом цивілізацій удосконалювалися й моделі, розширювалося їх застосування. Наприклад, в епоху Стародавнього Риму та Греції люди могли створювати динамічні моделі, тобто імітувати (відтворювати) потрібні події. Майбутні воїни відпрацьовували прийоми на дерев'яних мечях, полководці планували за допомогою карти і кам'яних фігурок битви. У всіх випадках переслідувалась одна мета - отримати більш позитивний ефект з майбутніх подій. Тобто модель дозволяла людям поліпшити результат своїх дій і уникнути (знижити вплив) негативних подій.

Розвиток моделювання нерозривно пов'язано з успіхами науки в цілому. Так в момент відкриття диференціальних рівнянь стали з'являтися математичні моделі динамічних процесів. З появою електронних обчислювальних пристроїв - комп'ютерні імітаційні моделі, здатні імітувати досліджувані процеси в різних масштабах часу.

Сучасний етап розвитку науки та техніки характеризується надзвичайно швидкою зміною моделей продукції, що випускається, зростаючою кількістю розробок, виконаних на нових, невідомих раніше принципах, що забезпечують виробам більш високі споживчі якості і створюють жорстку конкуренцію на ринку їх збуту. Це призводить до необхідності інтенсифікації процесів створення нової техніки, підвищення якості проектів, розробки, організації виробництва, налагодження та ремонту обладнання в короткі строки. При цьому досягається зниження витрат фінансових і трудових ресурсів, підвищення рентабельності виробництва і планований прибуток.

У цих умовах важливого значення набувають терміни і якість виконання проектно-конструкторських, налагоджувальних та ремонтних робіт. Їх відповідність сучасним вимогам можна забезпечити застосуванням нових технологій дослідження, проектування та прогнозування, заснованих на використанні методів математичного моделювання та обчислювальної техніки.

Посібник призначений для використання при освоєнні дисципліни «Математичне моделювання теплових процесів в енергетиці та промисловості», що входить до навчальних планів аспірантів (PhD) технічних університетів, що навчаються за спеціальністю 144 «Теплоенергетика».

## Загальні принципи моделювання

При створенні машин, апаратів, технологічних комплексів та інших об'єктів широко використовується моделювання. Як засіб пізнання і перетворення матеріального світу моделювання застосовується в експериментальних і теоретичних наукових дослідженнях.

Коли говорять про моделювання, то оперують трьома основними поняттями:

- об'єкт - той реальний предмет, процес, явище які необхідно вивчити або описати;
- система - об'єкт, процес, явище в якому беруть участь елементи пов'язані деякими зв'язками і відносинами;
- модель - результат відображення досліджуваного об'єкта, системи, явища в відомих для нас компонентах і правилах.

Фактично маємо загальне поняття моделі, як уявлення (відображення) вихідного об'єкта в рамках заданих форм і правил. Наведемо одне з розгорнутих визначень даного поняття.

***Модель - уявлення об'єкта, системи або поняття в деякій формі, відмінній від реального існування, для його (її) заміщення іншою системою з метою вивчення оригіналу або відтворення його будь – яких властивостей.***

Модель може бути точною копією будь-якого об'єкта (Хоча і в іншому масштабі та з іншого матеріалу) або зберігати лише частину значущих при постановці завдання його властивостей. У другому випадку модель є абстракцією об'єкта. Коли модель повністю дублює об'єкт, то вона йому ізоморфна. Абстрактні моделі є гомоморфні по відношенню до об'єкта.

Ізоморфізмом називають взаємно однозначне відтворення (відображення) з однієї системи  $S$  в іншу систему  $S'$  таке, що для будь-якого елемента  $x \in S$  існує єдиний елемент  $x' \in S'$  і навпаки.

Гомоморфізмом називають відображення елементів однієї системи  $S$  в іншу систему  $S'$  зі збереженням їх значущих властивостей (співвідносин).

Більшість моделей лише гомоморфні, тобто є спрощеним представленням реального світу або абстракцією. Проте, вони відповідають на поставлені в рамках того або іншого завдання питання.

До моделі пред'являються наступні вимоги, вона повинна бути:

1. простою і зрозумілою користувачеві;
2. цілеспрямованою, надійною в сенсі гарантії від абсурдних відповідей;
3. зручною в управлінні і «спілкуванні» з нею;
4. повної, з точки зору вирішення головних завдань;
5. адаптивною, тобто дозволяти без істотних зусиль переходити до інших модифікацій або оновлювати дані, тобто удосконалюватися у взаємодії з користувачем;
6. адекватною, тобто в повній мірі, відповідно до поставленого завдання, відтворювати оригінал.

В силу того, що ідея представлення системи за допомогою моделі має досить загальний характер, чіткого визначення функцій моделі не існує. Проте, можна визначити п'ять основних напрямків функцій моделей [1].

1. Моделі можуть допомогти упорядкувати нечіткі або суперечливі поняття, наприклад, при мережевому плануванні деякого виробничого процесу.
2. Всі мови, в основі яких лежить слово, виявляються неточними, коли справа доходить до складних понять і описів. Йдеться про те, що розглянута система більш компактно представляється в формі прийнятих позначень, блоків, рівнянь тощо, ніж в словесному описі. В якості прикладу можна навести рівняння теплопровідності.
3. Моделі часто застосовуються як засіб тренування, у тому числі й при виникненні критичної ситуації (моделі космічних кораблів, тренажери для навчання водіїв та ін.).
4. Прогнозування поведінки модельованих об'єктів. Тут модель може відповідати на питання: «Що буде, якщо ...».
5. Моделі дозволяють проводити контрольовані експерименти в ситуаціях, де експериментування на реальних об'єктах економічно недоцільно або практично неможливо. Тут зазвичай варіюють кілька параметрів системи, підтримуючи інші незмінними, і спостерігають результати експерименту. Часто, моделюючи систему, можна дізнатися значно більше про її внутрішні взаємозв'язки, ніж оперуючи з реальною системою.

Існує значна кількість різних класифікацій моделей, але не одна з них не є всеохоплюючою (оскільки ідея представлення системи за допомогою моделі носить досить загальний характер). Проте, можна привести загальну класифікацію за принципом переміщення від точності до абстракції.

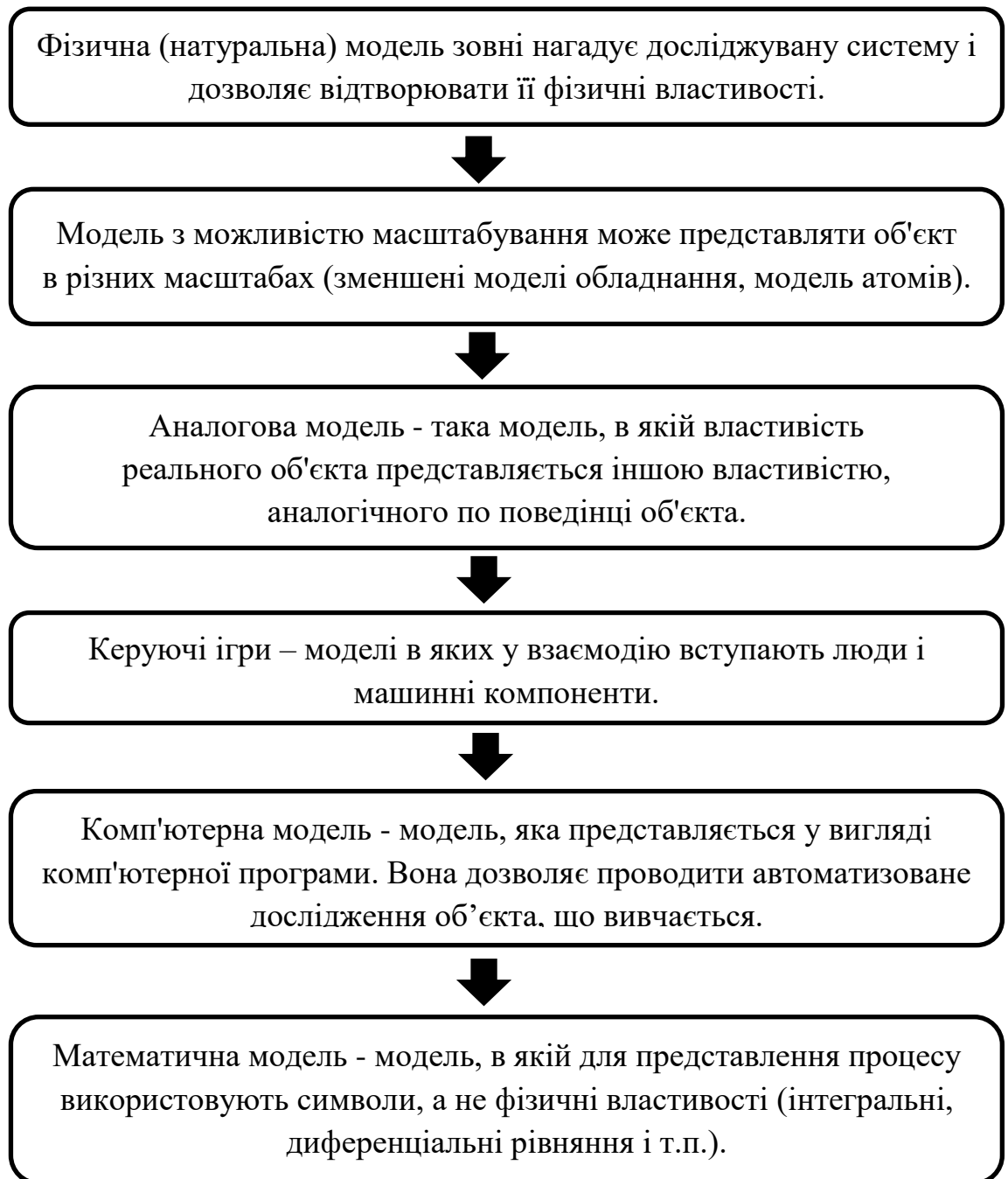


Рис. 1. Класифікація моделей за принципом переміщення від точності до абстракції

Математичні моделі - сукупність математичних об'єктів і відносин між ними, які адекватно відображають деякі властивості об'єкта. Математична модель являє собою самостійний опис досліджуваної системи в прийнятих термінах, поняттях, співвідношеннях. Вона сама по собі є самостійною структурою. Відповідно до правил та обмежень, прийнятих і виведених для відповідного класу структурних компонентів, над моделлю можна проводити дослідження, як би відірвавшись, тобто абстрагувавшись від реального об'єкта. Коли модель побудована коректно і є адекватною, існує можливість



відкриття нових властивостей досліджуваного об'єкта. Завдяки цьому, за допомогою абстрактних моделей можуть здійснюватися наукові відкриття.

Класифікацію моделей можна здійснювати більш детально, уточнюючи узагальнені класи моделей більш точними. Об'єднуючи наведені в різній літературі класи, можна отримати наступний список моделей [1]:

- **фізична** - модель, яка використовує ефекти законів фізики, які зустрічаються в оригіналі;
- **біологічна** - модель, біологічно пов'язана або подібна оригіналу;
- **матеріальна** - модель, яка використовує матеріали, які можуть бути в оригіналі;
- **геометрична** - модель, геометрично подібна оригіналу;
- **структурна** - модель, структурно подібна оригіналу, тобто містить зв'язки між компонентами, які подібні до зв'язків в оригіналі;
- **функціональна** - модель, функції якої, тобто процеси введення-виведення, подібні до функцій оригіналу;
- **детермінована** - модель, в якій не задіяні випадкові ефекти;
- **стохастична** - модель, на яку впливають випадкові ефекти (в моделі використовуються датчики випадкових / псевдовипадкових чисел для імітації випадкових ефектів);
- **статична** - модель, що не змінюється в часі;
- **динамічна** - модель, що змінюється в часі;
- **безперервна** - модель, всі параметри якої є безперервні функції часу, а значення параметрів змінюються без стрибків;
- **дискретна** - модель, що має стрибкоподібні зміни значень параметрів;
- **комп'ютерна** - модель, в ролі якої виступає комп'ютерна програма;
- **теоретична** - модель, отримана на основі вивчення фізичних закономірностей;
- **формальна** - модель, отримана на основі прояву властивостей модельованого об'єкту в зовнішньому середовищі, тобто розгляду оригіналу як кібернетичного чорного ящика;
- **лінійна** - модель, що складається з лінійних співвідношень;
- **нелінійна** - модель, яка містить хоча б одне нелінійне співвідношення;
- **алгоритмічна** - модель, представлена у вигляді систем рівнянь;
- **аналітична** - модель, представлена у вигляді залежностей вихідних параметрів від внутрішніх параметрів.

Останні шість класів моделей, відносяться до групи математичних моделей.

## **Основи теорії аналітичних моделей**

Емпіричні моделі є результатом математичної обробки експериментальних даних при ідентифікації об'єкта. Отримувані в процесі ідентифікації статичні і динамічні характеристики реального об'єкта є потенційно найбільш точними. Тому завжди, коли є така можливість, слід виконувати ідентифікацію об'єкта.

У тих випадках, коли об'єкт ще тільки проектується або необхідні експериментальні дослідження неможливі, вдаються до розробки аналітичних моделей [2, 3].

В основі аналітичних моделей лежать рівняння фізико-хімічних законів (закону збереження речовини, імпульсу тіла, енергії і т. д.). Коефіцієнти цих рівнянь включають в себе конструктивні і технологічні параметри об'єкта і по цій причини аналітичні моделі найбільш повно розкривають внутрішню структуру і сутність процесів в об'єкті, вплив окремих параметрів на статичні і динамічні характеристики об'єкта.

Цю перевагу аналітичних моделей важко переоцінити, тому що вона дозволяє сформулювати пропозиції щодо зміни окремих параметрів в напрямку забезпечення стійкості і керованості проектного об'єкта. У тих режимах, коли проявляється суттєва нелінійність об'єкта (наприклад, в режимах пуску, зупинки і аварійних режимах), аналітичні моделі є практично єдиним способом математичного опису його властивостей. Крім того, аналітичні моделі дозволяють визначати зміну тих параметрів, які на реальному об'єкті не вимірюються.

### **Класифікація аналітичних моделей**

За повноти відображення реальних фізичних процесів розрізняють наступні види аналітичних моделей (надалі будемо називати їх просто математичними моделями) [4-6]:

- статичні і динамічні;
- лінійні і нелінійні;
- з розподіленими і з зосередженими параметрами;
- детерміновані і імовірнісні (стохастичні).

Статичні моделі або моделі статичного наближення відображають залежність між величинами об'єкта (зокрема, між вхідними та вихідними величинами) в сталих (стаціонарних) режимах. У разі розподілених статичних

моделей вони відображають також розподіл параметрів по просторовим координатам. Система рівнянь статичних моделей не містить похідних за часом, але може містити похідні параметрів по просторовим координатам.

Динамічні моделі відображають зміну різних фізичних величин об'єкта в часі, тобто відповідають на питання, як в часі здійснюється перехід об'єкта з одного сталого стану в інший. В системі рівнянь динамічних моделей міститься хоча б одне диференціальне рівняння з похідною за часом.

Лінійні моделі абстрагуються від існуючих нелінійних залежностей в реальному об'єкті. У складі рівнянь лінійної моделі немає жодного нелінійного рівняння. Очевидно, що досить привабливі для дослідника своєю простотою в силу підпорядкування принципу суперпозиції (будь-яку складну дію можна розділити на дві і більше простих), лінійні моделі повинні використовуватися з обережністю, так як вони досить точно відображають поведінку реального об'єкта лише при невеликих відхиленнях його параметрів від вихідного стану рівноваги.

Нелінійні моделі мають в складі системи рівнянь хоча б одне нелінійне рівняння. Такі моделі точніше відображають властивості реальних об'єктів, але значно обмежують можливості оперувати ними. Як правило, досліднику залишається єдиний засіб - чисельне рішення нелінійної системи рівнянь, в той час як до лінійних систем може бути застосований добре розвинений апарат аналітичного рішення як в часовій (просторовій) області, так і в області зображень (Так, використовуючи перетворення Лапласа або Фур'є згортка двох функцій зводиться в просторі зображень до операції множення, а лінійні диференціальні рівняння стають алгебраїчними).

Моделі з розподіленими параметрами (РП моделі) відображають зміну фізичних величин об'єкта в просторі. У складі рівнянь моделі є хоча б одне рівняння в частинних похідних.

Одномірні розподілені моделі містять частинні похідні тільки по одній просторовій координаті (наприклад, по довжині потоку  $z$ ) і відображають зміну фізичних параметрів об'єкта по цій координаті.

Двомірні РП моделі містять похідні за двома просторовими координатами, відображаючи розподіл фізичних величин по перетину (неоднорідність поля).

Тривимірні моделі містять частинні похідні по трьох просторових координатах, відображаючи зміну параметрів об'єкта за об'ємом.

Моделі з зосередженими параметрами (ЗП моделі) абстрагуються від розмірів об'єкта, вважаючи їх такими, що можна знехтувати або такими, що не впливають на значення параметрів в різних точках. Іноді моделі з зосередженими параметрами називають моделями «ідеального перемішування». Такі моделі відображають зміну параметрів тільки в часі. До складу моделі входять лише звичайні диференціальні рівняння і відсутні рівняння в частинних похідних.

В основі детермінованих аналітичних моделей лежать рівняння класичної фізики і, зокрема, феноменологічної термодинаміки (оперує поняттями макрофізичної природи, такими, як температура, тиск тощо), яка встановлює детерміновані взаємозв'язки між фізичними величинами, які безпосередньо спостерігаються, що характеризують стан речовини, такими як тиск  $P$ , об'єм  $V$ , температура  $\theta$ , ентальпія  $H$  тощо.

В основі імовірнісних аналітичних моделей лежать рівняння статистичної фізики і, зокрема, статистичної термодинаміки, що відображають імовірнісну природу взаємодії між мікроскопічними частинками: атомами, молекулами, електронами, іонами і т. п. Виходячи із законів руху мікроскопічних частинок, статистична фізика встановлює імовірнісні закони поведінки макрокопічних тіл.

### **Способи представлення моделей**

Нелінійні аналітичні моделі, як правило, представляються системою співвідношень (рівнянь, нерівностей, логічних умов) та зв'язують вхідні  $x_i$  і вихідні  $y_i$  величини об'єкта. Лінійні моделі можуть бути представлені системою співвідношень в розгорнутому або векторно-матричному вигляді, у вигляді структурної схеми або у вигляді сигнального графа. Надалі будемо використовувати представлення моделей у вигляді диференційно-алгебраїчних рівнянь і сигнальних графів (топологічне представлення).

На відміну від структурної схеми сигнали в сигнальному графі відображаються точками (вершинами графа), а канали зв'язку - гілками (орієнтованими ребрами графа) із зазначенням передавальної функції над ними. Підсумовування сигналів проводиться в вершинах графа, а знак підсумовування відноситься до передавальної функції.

Сигнальний граф - сукупність вузлів, що представляють залежні і незалежні змінні системи рівнянь та з'єднань їх гілок зі стрілками і передачами, що вказують зв'язок між змінними.

- Витік - вузол сигнального графа, від якого спрямовані всі гілки, що примикають до нього.
- Стік - вузол сигнального графа, до якого спрямовані всі примикаючі до нього гілки.
- Шлях - безперервна послідовність гілок сигнального графа, спрямованих уздовж шляху за умови, що будь-який вузол зустрічається тільки один раз.
- Контур - замкнутий шлях графа.
- Недотичні контури - контури графа, що не мають спільних вузлів.
- Контур зворотного зв'язку - замкнутий шлях, уздовж якого кожен вузол може зустрічатися тільки один раз.
- Передача шляху - добуток передач всіх гілок, що входять в шлях графа.
- Передача гілки - відношення вихідної величини до вхідної.

Сигнал проходить тільки в напрямку стрілок графа. Сигнал в вузлі (змінна  $x$ ) визначається сумою сигналів, що приходять до цього вузла.

На рис. 2. представлені найпростіші графи, що зображують відповідно залежності  $x = ax_0$  (рис. 2, а) та  $x = ax_0 + bx_1 + cx_2$  (рис. 2, б).

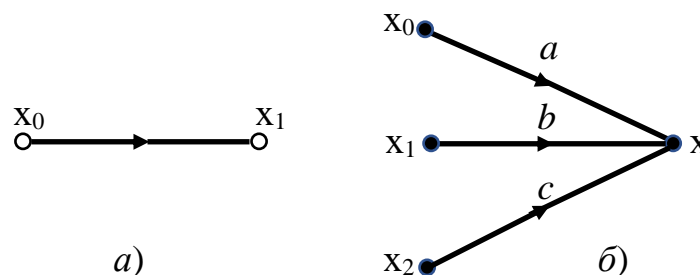


Рис. 2. Найпростіші сигнальні графи

Вузол графа, відповідний незалежній змінній (вхідній величині), прийнято позначати на кресленні зліва так, щоб від нього відходила тільки одна гілка (витік). Вузол графа, який зображає вихідну величину, позначають на кресленні праворуч так, щоб до нього підходила тільки одна гілка (стік). Це можна виконати вводячи в граф, наприклад, додаткові вузли з передачею, що дорівнює одиниці. При наявності в схемі декількох джерел сигналу граф будують для кожного сигналу, після чого вихідні величини знаходять за принципом накладення. Для однієї і тієї ж системи рівнянь можна побудувати кілька графів в залежності від того, які величини обрані в якості вузлів і як змінюється порядок вирішення вихідних рівнянь.

Можлива побудова графа по заданій системі рівнянь і складання системи рівнянь по заданому графу. Отриманий граф вирішують (визначають функції передачі) послідовним спрощенням структури графа, а також за допомогою формули Мейсона (Мезона).

Алгоритм побудови сигнального графа по системі лінійних рівнянь:

1. Для заданої технологічної схеми складають систему алгебраїчних рівнянь, яка дозволяє знайти шукані змінні.
2. Кожне рівняння отриманої системи розв'язують щодо однієї змінної величини, тобто нормалізують щодо цієї змінної і знаходять сигнал у вузлі.
3. Визначають загальне число вузлів майбутнього графа  $N$ , яке дорівнює загальній кількості чисел невідомих змінних і вільних членів рівняння, які визначаються наявністю джерел енергії в схемі. На поле графа наносять  $N$  точок так, щоб між вузлом - джерелом і вузлом - стоком були розташовані проміжні вузли.
4. Сигнал у вузлі знаходять по нормалізованим рівнянням; він дорівнює сумі сигналів, що підходять до даного вузла.

Послідовність складання системи рівнянь по сигнальному графу є наступною:

1. Аналіз графа проводять з точки зору визначення вузлів - витоків, вузлів - стоків і числа змішаних вузлів. Якщо граф містить петлі, то, відповідно, він нормалізований.
2. Сигнал для кожного вузла записують, маючи на увазі, що він складається тільки з суми входних сигналів:  $x_j = \sum a_{ji}x_i$ .
3. Записують рівняння для кожного вузла графа.

Складемо, як приклад, систему рівнянь по графу рис. 3.

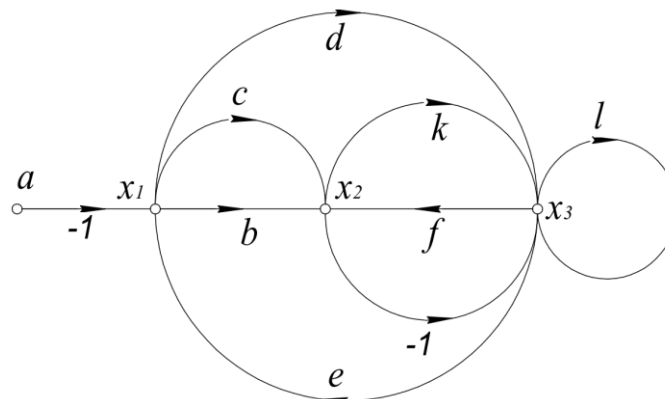


Рис. 3. Приклад сигнального графа

Граф рис. 3. нормалізований (присутня петля  $l$ ), містить один вузол - витік (а) і три змішаних вузла ( $x_1, x_2, x_3$ ).

Запишемо сигнал для кожного вузла:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -a + ex_3; \\ x_2 &= bx_1 + fx_3; \\ x_3 &= dx_1 + kx_3 - x_2 + ex_3. \end{aligned} \right\}$$

Граф відповідає наступній системі рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} a &= -x_1 + ex_3; \\ 0 &= bx_1 - x_2 + fx_3; \\ 0 &= dx_1 + (k-1)x_2 + (l-1)x_3. \end{aligned} \right\}$$

Розглянемо топологічне правило визначення передачі графа (формула Мезона).

Формула Мейсона дозволяє визначити функцію передачі  $W$  схеми, виходячи з контурів і шляхів графа:

$$W = \frac{\sum_{k=1}^n P_k \Delta_k}{\Delta},$$

де  $P_k$  – передача  $k$ -го прямого шляху від вузла - витоку до вузла - стоку вздовж стрілок, при проходженні якого кожен вузол зустрічається тільки один раз (передача прямого шляху  $P_k$  дорівнює добутку передач гілок цього шляху);

$n$  - число прямих шляхів;

$\Delta = 1 - \sum L_m + \sum L_{mi} - \sum L_{mij} + \dots$ , – визначник графа, що характеризує граф в цілому;

$L_m$  – передача  $m$ -го контуру зворотного зв'язку, що дорівнює добутку передач гілок, що утворюють контур;

$L_{mi}$  – добуток передач контурів зворотного зв'язку, що не торкаються один одного;

$L_{mij}$  – добуток передач трьох контурів зворотного зв'язку, що не торкаються один одного;

$\Delta_k$  – визначник частини графа (мінор визначника або визначник підграфа), що залишився після виключення контурів, що стикаються з  $k$ -м прямим шляхом, визначник  $\Delta_k$  характеризує  $k$ -й шлях графа.

Знайдемо за допомогою формули Мейсона передачу  $W_{13}$  від вузла - витоку  $x_1$  до вузла - стоку  $x_3$  графа, зображеного на рис. 4.

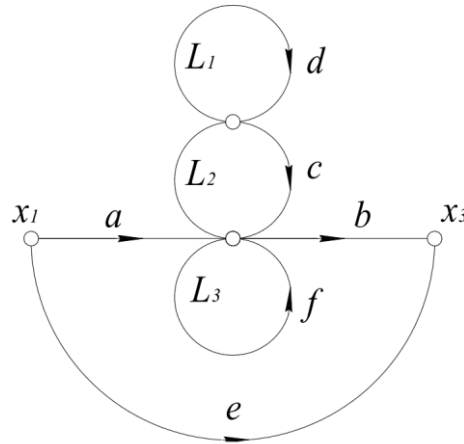


Рис. 4. Приклад використання формули Мейсона до сигнального графа

Передача  $W_{13} = (P_1 \cdot \Delta + P_2 \cdot \Delta) / \Delta$ .

Від вузла  $x_1$  до вузла  $x_3$  є два прямих шляхи:  $n = 2$ . Передачі цих шляхів  $P_1 = a \cdot b$  і  $P_2 = e$ . Граф має три контури зворотного зв'язку з передачами  $L_1 = d$ ,  $L_2 = c$  і  $L_3 = f$ .

Першого прямого шляху  $P_1 = a \cdot b$  не торкається тільки один контур зворотного зв'язку  $L_1 = d$ , тому  $\Delta_1 = 1 - L_1 = 1 - d$ .

Другого прямого шляху  $P_2 = e$  не торкається три контури зворотного зв'язку, причому між собою не торкаються тільки контури  $L_1$  і  $L_3$ . Таким чином,

$$\Delta_2 = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) + L_1 \cdot L_3 = 1 - (d + e + l \cdot f) + d \cdot l \cdot f.$$

Визначник графа:

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) + L_1 \cdot L_3.$$

В кінцевому випадку отримаємо [7]:

$$W_3 = \frac{a \cdot b(1 - d) + c[1 - (d - e - l \cdot f + d \cdot l \cdot f)]}{1 - (d + e + l \cdot f) + d \cdot l \cdot f}.$$

Як приклад розглянемо лінійну динамічну модель, рівняння якої записані в операційному вигляді:

$$\begin{aligned} y_1(p) &= W_1(p)x_1(p) - k_1 W_1(p)y_2(p); \\ y_2(p) &= k_2 W_2(p)x_2(p) + W_2(p)y_1(p) + k_3 W_2(p)y_3(p); \\ y_3(p) &= W_3(p)y_2 + W_3(p)y_4; \\ y_4(p) &= W_4(p)x_3(p) + k_4 W_4(p)y_3(p). \end{aligned}$$



Представимо наведену систему рівнянь за допомогою сигнального графа, як показано на рис. 5.

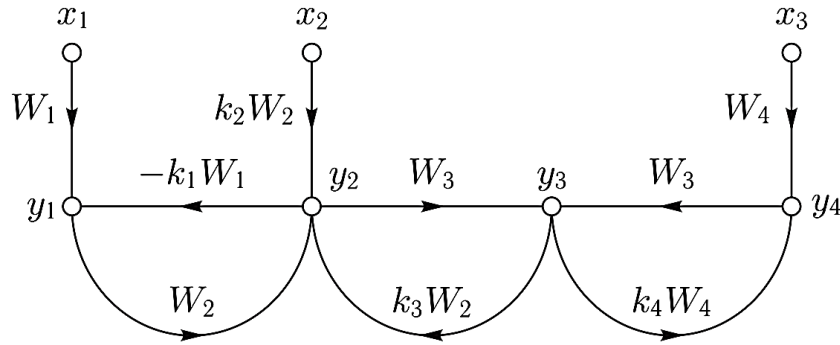


Рис. 5. Сигнальний граф моделі (1)

Простота і наочність відображення динаміки систем у вигляді сигнального графа дозволяють легко отримати функцію передачі складної системи за допомогою універсальної топологічної формули Мейсона [7].

Відповідно до формули Мейсона, функція передачі системи по деякому каналу « $x \rightarrow y$ » дорівнює:

$$W_{xy}(p) = \frac{\sum_{k=1}^n P_k(p) \Delta_k(p)}{\Delta(p)}.$$

У розглянутому прикладі рис. 5. сигнальний граф має три контури, два з яких (перший і третій) не торкаються один одного.

Отже, визначник сигнального графа дорівнює:

$$\Delta(p) = 1 + k_1 W_1 W_2 - k_3 W_2 W_3 - k_4 W_3 W_4 - k_1 W_1 W_2 k_4 W_3 W_4.$$

Знайдемо, наприклад, функцію передачі системи по каналу  $x_2 \rightarrow y_2$ .

Від входу (витоку)  $x_2$  до виходу (стоку)  $y_2$  веде один прямий шлях, функція передачі якого дорівнює  $P_1(p) = k_2 W_2(p)$ . Після видалення цього шляху два контури руйнуються, і в підграфі залишається один (третій) контур, отже, мінор визначника дорівнює  $\Delta_1(p) = 1 - k_4 W_3 W_4$ .

Отже, функція передачі системи по каналу  $x_2 \rightarrow y_2$  дорівнює

$$W_{x_2 y_2}(p) = \frac{k_2 W_2 [1 - k_4 W_3 W_4]}{1 + k_1 W_1 W_2 - k_3 W_2 W_3 - k_4 W_3 W_4 - k_1 W_1 W_2 k_4 W_3 W_4}.$$

## Етапи створення аналітичних моделей

Будь-який, навіть дуже простий, на перший погляд, об'єкт неможливо абсолютно точно описати математичними співвідношеннями. Наші знання про фізичні процеси, що протікають в об'єкті, завжди обмежені. Звернемо особливу увагу на те, що постановка задачі «отримати по можливості точну модель» неправильна по суті. Навіть якби ми постаралися врахувати в математичній моделі всі доступні нашому розумінню нюанси явищ і особливості роботи реального об'єкта, швидше за все, такою моделлю не вдалося б скористатися з-за її непомірної складності. Правильно було б поставити завдання отримання найбільш простої моделі, що зберігає основні властивості об'єкта.

Однак будь-яке спрощення веде до втрати точності. Очевидно, що допустима втрата точності моделі залежить від того, наскільки спотворюються результати дослідження, проведені з використанням даної моделі.

Іншими словами, допустимі спрощення цілком залежать від призначення моделі, тобто від тієї мети, заради якої і розробляється модель.

Тому на першому етапі повинна бути чітко визначена мета розробки математичної моделі, тобто сформульована дослідницька задача, в якій буде використана модель. В залежності від типу завдання виділяють головні властивості і зв'язки об'єкта (внутрішні і зовнішні), які неодмінно слід врахувати, і другорядні властивості і зв'язки, які можна відкинути, не завдавши помітної шкоди точності рішення дослідницького завдання. Таким чином, для вирішення кожного завдання розробляється своя математична модель.

Перерахуємо основні завдання досліджень теплоенергетичних установок за допомогою математичних моделей [4].

1. Дослідження статички і статична оптимізація режимів роботи обладнання. Наприклад, оптимізація розподілу навантажень між енергоблоками, вибір оптимального складу працюючого устаткування, вибір найкращих значень параметрів енергоблоку (коефіцієнта надлишку повітря, вакууму в конденсаторі, перепаду температур на підігрівачах регенеративної системи тощо). Для вирішення завдань цієї групи досить мати статичні нелінійні моделі об'єкта.

2. Аналіз і синтез систем автоматизованого регулювання (АСР). Тут достатні лінійні (лінеаризовані) динамічні моделі, так як нормальний режим роботи обладнання з працюючими системами автоматичного регулювання характеризується малими відхиленнями всіх параметрів об'єкта.

3. Дослідження аварійних режимів. Для цих режимів характерні глибокі і швидкі відхилення параметрів об'єкта, а тому модель повинна бути нелінійною і динамічною, краще з розподіленими параметрами або багатоточкового наближення. З-за високих швидкостей протікання процесів впливом ділянок з великими постійними часу можна знехтувати, вважаючи, що їх параметри не встигають помітно змінитися за час розвитку аварії, але малі постійні часу врахувати необхідно.

4. Дослідження пусків, зупинок і глибоких змін режимів. Для даної групи завдань характерні глибокі, але повільні зміни всіх параметрів об'єкта. Тому модель повинна бути нелінійно-динамічною. Малими постійними часу нехтують, але особливу увагу звертають на точність моделі в статиці.

На другому етапі виконується сама розробка математичної моделі. Починають етап з декомпозиції, тобто з поділу загальної задачі математичного опису на ряд часткових завдань (підзавдань), що мають більш просте рішення. Якщо складається модель такого складного об'єкта, як енергоблок, використовується багаторівнева декомпозиція.

Якщо об'єкт математичного опису визначено, то в ньому виділяють всі середовища, що мають різні фізичні властивості або, що знаходяться в різних умовах роботи. У разі теплових об'єктів такими середовищами, як правило, є неактивний метал корпусу агрегату, зовнішній теплоносій, активний метал теплопередаючої стінки і внутрішній теплоносій.

Для кожного рідкого або газоподібного середовища загальний тепло-гідравлічний процес представляється трьома диференціальними рівняннями фізичних законів: закону збереження речовини ( $M$ ), закону збереження енергії ( $E$ ) і закону збереження імпульсу сили (кількості руху  $P$ ).

Об'єднуючи далі моделі окремих елементів і рівняння зв'язків між ними (процес, що є зворотнім декомпозиції), отримаємо загальну модель складного об'єкта.

На третьому етапі виконуються всі дослідження на моделі, тобто вирішується те завдання, заради якого й розроблялася модель.

Спрощення можливо за рахунок декомпозиції розв'язку. Підставою для декомпозиції служить велика різниця в швидкостях протікання теплових і гідродинамічних процесів. Швидкість протікання теплових процесів визначається швидкостями руху теплоносіїв (зазвичай 1–20 м/с в теплообмінних апаратах енергетичних об'єктів). Швидкість же протікання гідродинамічних процесів дорівнює швидкості поширення звуку в теплоносії,

що в 10 – 20 разів більше швидкості теплових процесів. Тому розрахунок рівнянь енергії можна виконувати при припущенні безінерційності гідравлічних процесів, а автономні розрахунки гідродинаміки кожного теплоносія - при припущенні сталості у часі їх температур (ентальпій).

На четвертому етапі перевіряється достовірність і точність отриманих на моделі результатів дослідження і в разі незадовільної точності розробник повинен повернутися до другого етапу, вносячи корективи в систему спрощень і припущень, прийнятих раніше.

Адекватність моделі об'єкту-оригіналу може бути строго встановлена тільки на основі порівняльного експерименту на діючому об'єкті і на моделі. Однак накопичений досвід, знання і вивченість процесів дозволяють не робити в висновках про адекватність моделі значних помилок.

### **Рівняння основних законів фізики в моделях з розподіленими параметрами**

Три види диференціальних рівнянь складають основу математичної моделі теплових процесів:

- рівняння закону збереження речовини  $M$  (рівняння суцільності або нерозривності);
- рівняння закону збереження кількості руху  $P$ ;
- рівняння закону збереження енергії  $E$  (рівняння теплопровідності - для твердих середовищ).

Решта закони (Стефана-Больцмана, Менделєєва-Клапейрона, Фур'є тощо) є допоміжними, вони розкривають зміст тих чи інших величин, що входять в основні рівняння.

Конкретний вид основних рівнянь в значній мірі залежить від прийнятих при їх написанні припущень.

Всі рівняння ( $M$ ,  $P$ ,  $E$ ) в лінійному наближенні мають однакову математичну форму [5, 6]:

$$\frac{dY}{dt} = \sum X^+ - \sum X^-,$$

де

$$Y = \begin{bmatrix} M \\ E \\ M \cdot \omega \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{– маса речовини, кг,} \\ \text{– енергія речовини, кДж,} \\ \text{– імпульс тіла (кількість руху), кг \cdot м/с = н \cdot с;} \end{array}$$

$$\sum \mathbf{X}^+ = \begin{bmatrix} \sum D^+ \\ \sum Q^+ \\ \sum F^+ \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{– вхідні витрати речовини, кг/с} \\ \text{– вхідні потоки тепла, кВт,} \\ \text{– сили прискорення руху потоку, н;} \end{array}$$

$$\sum \mathbf{X}^- = \begin{bmatrix} \sum D^- \\ \sum Q^- \\ \sum F^- \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{– вихідні витрати речовини, кг/с} \\ \text{– вихідні потоки тепла, кВт,} \\ \text{– сили гальмування руху потоку, н.} \end{array}$$

Якщо розглядається розподілена модель, повна похідна повинна бути розкрита через частинні, тобто передбачається відображення зміни фізичних величин об'єкта не тільки в часі, але і в просторі.

Наприклад, для тривимірної моделі, що враховує неоднаковість значень фізичних величин за об'ємом, можна записати:

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial z_2} \frac{\partial z_2}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial z_3} \frac{\partial z_3}{\partial t},$$

де  $z_1, z_2$  і  $z_3$  – просторові координати.

Для значної кількості теплових об'єктів досить враховувати тільки зміну фізичних величин по довжині потоку, нехтуючи зміною в його перетинах. Тоді допустимої є одновимірною модель з повною похідною

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t} + \omega \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial z},$$

де  $\omega = \partial z / \partial t$  – миттєва швидкість потоку.

У разі моделювання яскраво виражених ємностей (баки з рідиною, барабан котла, парогенератор енергоблоку тощо) або в разі використання моделей точкового наближення (моделей з зосередженими параметрами (ЗП)) залежність величин від просторових координат не враховується, тоді  $d\mathbf{Y} / dt$  є звичайною похідною.

### **Рівняння закону збереження речовини (М)**

Розглянемо однофазний потік з щільністю  $\rho$ , що рухається по трубі, довжина якої  $L$ , площа поперечного перерізу  $f$ , а внутрішній об'єм труби  $V$ . Масова витрата середовища, що надходить в потік (або виходить з нього) в довільному перерізі  $z$  в момент часу  $t$  позначимо як  $D(t, z)$ .

Можливі три варіанти технологічного процесу при русі потоку, який відобразимо наступним загальним записом для рівняння закону збереження речовини:

$$\frac{dM}{dt} = \begin{cases} 0, \\ + D^+, \\ - D^-. \end{cases}$$

Перший випадок відображає просте перенесення речовини по трубі, тобто відсутність обміну речовиною з зовнішнім середовищем, відсутність хімічних або фазових перетворень.

Другий випадок відповідає утворенню додаткової речовини в процесі руху потоку (наприклад, утворення пара в випарних трубах або додаткової кількості розглянутої речовини за рахунок хімічної реакції). У правій частині рівняння з'явиться складова масової витрати  $D^+$ .

У третьому випадку кількість речовини уздовж труби зменшується (наприклад, за рахунок випаровування води або хімічної реакції) – у правій частині рівняння записується складова  $D^-$ .

У теплообмінних апаратах енергетичної галузі в основному реалізований випадок простого перенесення речовини. Для нього після розкриття повної похідною в наведеному вище рівнянні, враховуючи, що маса речовини в трубі  $M = V \cdot \rho$ , внутрішній об'єм труби  $V = f \cdot L$ , щільність потоку  $\rho(t, z)$  залежить від часу  $t$  і просторової координати  $z$ , а миттєва швидкість потоку  $\omega = \partial z / \partial t$ , отримуємо

$$V \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial D}{\partial z_n} = 0,$$

де для зручності введена відносна (нормована) координата довжини  $z_n = z / L$ , що змінюється в межах від нуля до одиниці.

### **Рівняння закону збереження енергії потоку (Е)**

Конкретний вид рівняння енергії залежить від прийнятих при виведенні припущень, які визначаються особливістю процесів перетворення енергії в об'єкті. Розглянемо ці особливості стосовно до теплообмінних апаратів, в яких відсутні хімічні і ядерні перетворення (виділенням тепла в каналах атомних реакторів зазвичай нехтують [5, 6]).

Можна прийняти наступні припущення:

- робота з подолання сил тертя йде на виділення тепла;
- побічні процеси зміни кінетичної і потенційної енергії потоку нехтуються;

- зміна теплоти зовнішнього джерела перетвориться в зміну ентальпії потоку.

$$dQ_{\text{зовн}} = d(M_i) = dE.$$

При русі однофазного потоку по трубі можливі три варіанти:

$$\frac{dE}{dt} = \begin{cases} 0 & \text{– рух потоку без теплообміну,} \\ -qH & \text{– рух потоку з охолодженням,} \\ +qH & \text{– рух потоку з підігрівом,} \end{cases}$$

де  $q$  – питомий тепловий потік, кВт / м<sup>2</sup>;  $H$  – площа внутрішньої поверхні труби, м<sup>2</sup>.

Зауважимо, що змінні які входять в рівняння (енергія потоку  $E$  і питомий тепловий потік  $q$ ) є функціями двох аргументів – часу  $t$  і просторової координати  $z$ .

Надалі будемо розглядати випадок нагріву потоку при русі.

Розкриємо повну похідну енергії потоку і перейдемо до нормованої довжини  $z$  і витраті  $D$ , в результаті маємо рівняння

$$V \frac{\partial(\rho i)}{\partial t} + \frac{\partial(Di)}{\partial z_H} = +qH.$$

Досить часто використовується й інша форма запису рівняння енергії потоку:

$$V\rho \frac{\partial i}{\partial t} + D \frac{\partial i}{\partial z_H} = +qH.$$

Наведемо ще один варіант запису рівняння енергії одновимірного однофазного потоку через його температуру  $\theta$ , взявши до уваги, що ізобарна теплоємність і ентальпія пов'язані співвідношенням  $\partial i = c_P \cdot \partial \theta$ :

$$V\rho c_P \frac{\partial \theta}{\partial t} + Dc_P \frac{\partial \theta}{\partial z_H} = +qH.$$

Для розв'язання рівняння енергії необхідно до визначити питомий тепловий потік  $q$ .

### **Рівняння закону збереження кількості руху (Р)**

При примусовій циркуляції теплоносія в трубах аеродинамічною складовою сили уздовж осі потоку, що виникає за рахунок різниці щільності нижчих і вищих шарів потоку, можна знехтувати.

Можна знехтувати і складовою сили тяжіння, спрямованої вздовж потоку, величина якої істотно менше сил тиску  $P$  і тертя.

Сила тертя, що припадає на одиницю площі поперечного перерізу труби, істотно залежить від стану внутрішньої поверхні і форми труби. Для гладких циліндричних труб використаємо формулу Вейсбаха-Дарсі (визначає втрати напору або втрати тиску при розвиненій турбулентній течії нестисливої рідини на гідравлічних опорах), тоді рівняння руху буде мати вигляд

$$\frac{L}{f} \frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial z_{\text{н}}} + \xi \frac{D^2}{\rho} = 0,$$

де  $\xi = \lambda / (2 \cdot d \cdot f^2)$  – приведений коефіцієнт гідравлічного опору, який визначається дослідним шляхом;  $\lambda$  – коефіцієнт гідравлічного опору;  $d$  – внутрішній діаметр труби.

При нормальних режимах експлуатації теплообмінників різкі зміни швидкостей потоків не допускаються, тому розробники аналітичних моделей зазвичай нехтують силою інерції потоку, тобто вважають, що  $\partial D / \partial t = 0$ . При цьому рівняння наведене вище спрощується:

$$\frac{\partial P}{\partial z_{\text{н}}} + \xi \frac{D^2}{\rho} = 0.$$

Звернемо увагу на те, що в наведеному рівнянні руху відсутня похідна по часу. Це означає, що при прийнятому припущенні про відсутність сили інерції вид рівняння залишається незмінним як для статичних, так і для динамічних моделей.

Рівняння нерозривності, енергії і руху, доповнені рівняннями термодинамічного стану речовини, утворюють замкнену систему рівнянь математичної моделі потоку однофазного теплоносія в трубах теплообмінних апаратів (поверхонь нагріву котлів, парогенераторів, реакторів тощо).

### **Рівняння закону збереження енергії (теплопровідності) труб**

Зазвичай рівняння теплопровідності твердих тіл отримують при припущенні про однорідність їх властивостей. Для поверхонь нагріву теплообмінників характерний високий рівень теплових потоків в напрямку нормалі до поверхні. Тому поширенням тепла вздовж стінки в першому наближенні можна знехтувати.



**Циліндрична стінка.** Рівняння теплопровідності циліндричної стінки труб:

$$\rho_m c_m \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \lambda \left( \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right),$$

де  $\rho_m$ ,  $c_m$  – щільність і теплоємність металу;  $\vartheta$  – температура металу;  $\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності.

**Плоска стінка.** При відносно малій товщині стінки (в разі тонких труб) зміною площі поверхні теплопередачі по товщині у можна знехтувати, що рівносильно переходу до моделі плоскої стінки.

Наведемо рівняння енергії цієї моделі:

$$\rho_m c_m \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2}.$$

Отримані рівняння теплопровідності є в загальному випадку нелінійних диференціальними рівняннями в частинних похідних. При припущенні про незмінність  $\rho_m$ ,  $c_m$  і  $\lambda$  рівняння стають лінійними [5, 6].

### **Моделі з різним ступенем наближення**

У загальному вигляді розглянуті в попередньому параграфі рівняння основних законів фізики є нелінійними диференціальними рівняннями в частинних похідних, тобто нелінійними моделями з розподіленими параметрами (нелінійними РП моделями). Так як загальних методів розв'язку систем нелінійних диференціальних рівнянь не існує, доводиться вирішувати їх лише наближено з використанням різних чисельних методів. Однак у багатьох інженерних задачах допустимо використовувати і більш прості моделі, які отримують з вихідних нелінійних диференціальних рівнянь за допомогою деяких припущень і перетворень. До числа таких моделей належать моделі статичного наближення (статичні моделі), моделі лінійного наближення (лінійні моделі), моделі точкового і багатоточкового наближення (моделі з зосередженими параметрами або скорочено – ЗП моделі).

### **Моделі статичного наближення (статичні моделі)**

Модель статичного наближення відображає залежність між величинами в сталому режимі, для якого частинні похідні від фізичних величин за часом  $\partial y / \partial t$  дорівнюють нулю. Тому модель статички легко отримати з диференціальних рівнянь, поклавши рівними нулю всі похідні за часом.

Рівняння законів збереження речовини, енергії потоку, руху і теплопровідності в розподіленому статичному наближенні матимуть вигляд:

$$\begin{aligned}\frac{\partial D}{\partial z_H} &= 0, \\ D \frac{\partial i}{\partial z_H} &= +qH, \\ \frac{\partial P}{\partial z_H} + \xi \frac{D^2}{\rho} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} &= 0.\end{aligned}$$

З рівнянь статичного наближення тільки рівняння руху потоку не змінило свого виду, так як воно було отримано при припущенні, що прискорення потоку дорівнює нулю.

### **Моделі лінійного наближення (лінійні моделі)**

Аналітичний апарат розв'язку систем диференціальних рівнянь, що є досить добре розвиненим, робить доцільним використання лінійних моделей реальних процесів. Техніка отримання моделей лінійного наближення полягає в лінеаризації вихідних нелінійних диференціальних рівнянь. Суть лінеаризації полягає в наступному – залишення афінної частини розкладання нелінійної функції  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  в ряд Тейлора в точці  $f_0 = f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$  з перенесенням початку координат в цю точку [8, 9]:

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x_1, \dots, x_n) - f_0 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_0 \Delta x_i = \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right)_0 \Delta x_1 + \dots + \left( \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)_0 \Delta x_n.\end{aligned}$$

Тут  $\left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_0$  позначає частинну похідну функції  $f$  по аргументу  $x_i$  в точці лінеаризації  $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ .

Для лінеаризації нелінійного диференціального рівняння досить взяти лінійну частину приросту кожного доданка, розглядаючи його як нелінійну функцію. Під точкою лінеаризації тут розуміється вихідний статичний режим,

значення параметрів в якому будемо позначати індексом «0». При виконанні лінеаризації досить пам'ятати про обчислення приростів основних функцій:

$$\Delta(xy) = y_0\Delta x + x_0\Delta y; \quad \Delta(x^m) = mx_0^{m-1}\Delta x.$$

### Рівняння закону збереження речовини

Якщо розглядається поверхня теплопередачі з однофазним теплоносієм фіксованої довжини, то об'єм  $V$ , що займає середовище, незмінний, тобто рівняння є лінійним відносно змінних величин  $\rho$  і  $D$ , і лінеаризації не потребує. Його можна записати через приріст значень змінних в вихідному статичному стані, при цьому структура рівняння збережеться:

$$V \frac{\partial(\Delta\rho)}{\partial t} + \frac{\partial(\Delta D)}{\partial z_{\text{н}}} = 0.$$

### Рівняння закону збереження енергії

Це рівняння нелінійне, так як змінні величини  $\rho$ ,  $i$ ,  $D$  входять в нього у вигляді добутку. Візьмемо приріст від лівої і правої частин рівняння:

$$\Delta\rho + V\rho_0 \frac{\partial(\Delta i)}{\partial t} + D_0 \frac{\partial(\Delta i)}{\partial z_{\text{н}}} + \left( \frac{\partial i}{\partial z_{\text{н}}} \right)_0 \Delta D = H\Delta q.$$

Тут індекс «0» означає значення параметрів у вихідному сталому режимі, щодо якого відбуваються їх зміни.

У статичному режимі похідна за часом  $\left( \frac{\partial i}{\partial t} \right)_0$  дорівнює нулю.

Тоді лінеаризоване рівняння енергії набуде вигляду:

$$V\rho_0 \frac{\partial(\Delta i)}{\partial t} + D_0 \frac{\partial(\Delta i)}{\partial z_{\text{н}}} = H\Delta q - \left( \frac{\partial i}{\partial z_{\text{н}}} \right)_0 \Delta D.$$

Співмножник  $\left( \frac{\partial i}{\partial z_{\text{н}}} \right)_0$ , що визначає розподіл ентальпії потоку в

початковому статичному режимі, може бути визначений з рівняння статички:

$$\left( \frac{\partial i}{\partial z_{\text{н}}} \right)_0 = \frac{Hq_0(z_{\text{н}})}{D_0}.$$

Закон зміни питомого теплового потоку  $q_0(z_{\text{н}})$  в початковому статичному режимі при конвективному теплообміні зі стінкою залежить від перепаду

температур потоку і стінки  $q_0(z_n) = \alpha [\mathcal{G}_0(z_n) - \theta_0(z_n)]$  і може бути визначений тільки при спільному розв'язанні моделі статички всієї теплообмінної поверхні, що включає рівняння енергії потоку в трубі, теплопередаючої стінки і зовнішнього теплоносія (в разі конвективного теплообмінника).

### **Моделі з зосередженими параметрами**

Моделі з зосередженими параметрами (ЗП моделі або моделі точкового наближення) описуються звичайними диференціальними рівняннями, що відображають зміну параметрів об'єкта тільки в часі. Для їх отримання вихідні диференціальні рівняння в частинних похідних повинні бути проінтегровані у всьому діапазоні зміни просторових координат.

Виконаємо перехід від моделей з розподіленими параметрами до моделей точкового наближення на прикладі рівнянь законів збереження речовини і енергії одновимірного однофазного потоку.

### **Рівняння закону збереження речовини**

Проінтегруємо рівняння закону збереження речовини по нормованій координаті  $z_n$  в межах її зміни від 0 до 1:

$$V \frac{d\bar{\rho}}{dt} = D^{\Pi} - D^K.$$

Тут через  $D^K$  і  $D^{\Pi}$  позначені витрати на виході (кінцева витрата) і на вході труби (початкова витрата), а  $\rho$  – середнє інтегральне по довжині значення щільності потоку  $\int_0^1 \rho dz_n = \bar{\rho}$ .

Наведене рівняння показує, що зміна густини (маси М) речовини в трубі призводить до появи небалансу потоків на вході і виході труби. Так, при нагріванні потоку, що рухається по трубі, його густина зменшується, і розширення середовища викликає збільшення витрати на виході  $D^K$  в порівнянні з витратою на вході  $D^{\Pi}$ .

### **Рівняння закону збереження енергії**

Проінтегруємо рівняння закону збереження енергії по нормованій координаті  $z_n$  в межах від 0 до 1. Тоді рівняння енергії потоку в точковому наближенні набуває вигляду:

$$V\bar{\rho}\frac{\partial \bar{i}}{\partial t} + Di^k = Di^p + \alpha H (\bar{\vartheta} - \bar{\theta}),$$

де  $\bar{i}, \bar{\theta}, \bar{\vartheta}$  – середньоінтегральні по довжині значення ентальпії, температури потоку і стінки труби.

У моделях точкового наближення, абстрагованих від розмірів, існують тільки два значення будь-якого параметра – на вході і на виході. Тому середні інтегральні значення параметрів в отриманих рівняннях доводиться виражати через їх початкові і кінцеві значення. У практиці математичного моделювання поширення отримали два способи заміни [10,11]:

1. середньоінтегральні значення параметрів приймають рівними кінцевим значенням:

$$\bar{\rho} = \rho^k, \quad \bar{i} = i^k, \quad \bar{\theta} = \theta^k.$$

Такий спосіб заміни рівносильний припущенню про ідеальне перемішування потоку в трубі. Моделі виходять простими, але завищують акумуляцію тепла в об'єкті.

2. середні інтегральні значення беруть рівними середнім арифметичним значенням параметрів на вході і виході:

$$\bar{\rho} = \frac{\rho^p + \rho^k}{2}, \quad \bar{i} = \frac{i^p + i^k}{2}, \quad \bar{\theta} = \frac{\theta^p + \theta^k}{2}.$$

Такий спосіб заміни рівносильний припущенню про лінійний закон зміни параметра уздовж труби. Здавалося б, ця заміна повинна давати більш точну, хоча і більш складну модель, ніж перша заміна. Однак модель середнього арифметичного призводить до явної невідповідності фізики реальних процесів на початковому інтервалі часу і може давати нульові або негативні значення коефіцієнтів посилення замість позитивних значень [6].

### Моделі багатоточкового наближення

Моделі точкового наближення досить добре відображають реальність, якщо об'єкт являє собою яскраво виражену ємність. При описі ж процесів теплообміну в трубах моделі точкового наближення можуть виявитися занадто грубими. Підвищити точність моделей з зосередженими параметрами можна, переходячи до моделей багатоточкового наближення.

Довгу трубу теплообмінника представляють як систему з  $n$  коротких ділянок, кожен з яких описують моделлю точкового наближення. Таким



$$\begin{cases} \frac{V}{n} \rho_1 \frac{\partial i_1^K}{\partial t} + Di_1^K = Di^n + \alpha \frac{H}{n} (\vartheta_1 - \theta_1^K), \\ \frac{V}{n} \rho_2 \frac{\partial i_2^K}{\partial t} + Di_2^K = Di_1^K + \alpha \frac{H}{n} (\vartheta_2 - \theta_2^K), \\ \dots\dots\dots \\ \frac{V}{n} \rho_n \frac{\partial i^K}{\partial t} + Di^K = Di_{n-1}^K + \alpha \frac{H}{n} (\vartheta_n - \theta^K). \end{cases}$$

При аналітичному розв'язанні рівнянь системи число ділянок зазвичай рекомендується брати  $n = 3-10$ . Однак такого числа дискретизації може виявитися недостатньо для забезпечення необхідної точності моделі, зокрема, при використанні її в задачах синтезу оптимального управління. Зауважимо, що саме до багатоточкової моделі зводиться чисельний розв'язок рівнянь в частинних похідних в результаті дискретизації по просторовій координаті, але число розбиття  $n$  в цьому випадку береться значно більшим ( $n = 20-50$ ).

## Динамічні характеристики моделей теплових процесів потоку

## Динамічні характеристики РП моделі потоку

Підставимо в лінеаризоване рівняння енергії

$$V\rho_0\frac{\partial(\Delta i)}{\partial t} + D_0\frac{\partial(\Delta i)}{\partial z_{\text{H}}} = H\Delta q - \left(\frac{\partial i}{\partial z_{\text{H}}}\right)_0\Delta D.$$

вираз для приросту теплового потоку  $\Delta q$  та коефіцієнта пропорційності при витраті  $\Delta D$ :

$$\Delta q = \alpha(\Delta\vartheta - \Delta\theta);$$

$$\left(\overline{\frac{\partial i}{\partial z_{\text{H}}}}\right)_0 = \frac{H\overline{q_0(z_{\text{H}})}}{D_0}.$$

Виразимо приріст температури потоку через ентальпію

$$\Delta\theta = \Delta i/c_P.$$

Тоді рівняння енергії в лінійному наближенні буде мати наступний вигляд:

$$V\rho_0\frac{\partial(\Delta i)}{\partial t} + D_0\frac{\partial(\Delta i)}{\partial z_{\text{H}}} = H\alpha\left(\Delta\vartheta - \frac{\Delta i}{c_P}\right) - \frac{H\bar{q}_0}{D_0}\Delta D.$$

Введемо для скорочення запису наступні константи:  $\tau = \frac{V\rho_0}{D_0}$  – постійну

часу потоку, що дорівнює часу проходження речовини по трубі;  $St = \frac{\alpha H}{c_p D_0}$

– число Стентона;  $k_D = \frac{H\bar{q}_0}{D_0^2} = \frac{(\overline{\partial i / \partial z_H})_0}{D_0}$  – коефіцієнт при витраті  $\Delta D$ .

Тепер рівняння енергії приймає спрощений вигляд:

$$\tau \frac{\partial(\Delta i)}{\partial t} + \frac{\partial(\Delta i)}{\partial z_H} + St \Delta i = c_P St \Delta \vartheta - k_D \Delta D.$$

Використаємо подвійне перетворення Лапласа для розв'язку отриманого неоднорідного лінійного диференціального рівняння з метою визначення динамічних характеристик.

Для спрощення запису індекс нормування у просторовій координаті  $z$  будемо опускати.

Визначимо динамічні характеристики потоку по ентальпійному каналу  $i^\Pi \rightarrow i$ .

$$\text{Канал } i^\Pi \rightarrow i$$

Щоб виділити модель каналу з наведеного вище рівняння слід інші вхідні впливи вважати постійними, тобто прирівняти до нуля їх прирости ( $\Delta \theta$  і  $\Delta D$ ):

$$\tau \frac{\partial(\Delta i)}{\partial t} + \frac{\partial(\Delta i)}{\partial z_H} + St \Delta i = 0.$$

Застосуємо перетворення Лапласа за часом при нульових початкових умовах

$$\frac{\partial I(p, z)}{\partial z} + (\tau p + St) I(p, z) = 0,$$

і перейдемо до повторного перетворення по координаті  $z$ :

$$s I(p, s) - I(p, 0) + (\tau p + St) I(p, s) = 0,$$

де  $I(p, 0) = I^\Pi(p)$  – граничне (для  $z = 0$ ) зображення  $I(p, z)$ .

Отримане алгебраїчне рівняння запишемо в стандартному вигляді:

$$[s + (\tau p + St)] I(p, s) = I^\Pi(p)$$



або

$$I(p, s) = \frac{1}{s + (\tau p + St)} I^n(p) = W(p, s) I^n(p).$$

Виконаємо зворотне перетворення Лапласа щодо змінної  $s$ . Так як вхідний вплив  $I^n(p)$  не залежить від змінної  $s$ , в результаті зворотного перетворення отримаємо:

$$I(p, z) = e^{-(\tau p + St)z} I^n(p).$$

Звідси знаходимо вираз шуканої функції передачі каналу «Ентальпія потоку на вході – ентальпія в довільному перерізі  $z$ »

$$W_{i^{пi}}(p, z) = e^{-Stz} e^{-p\tau z}.$$

Наведеній функції передачі, що є добутком підсилючої ланки  $e^{-Stz}$  і ланки запізнення (передає сигнал зі входу на вихід без спотворення)  $e^{-p\tau z}$ , відповідає перехідна характеристика

$$h_{i^{пi}}(t, z) = 1(t - \tau z) e^{-Stz}.$$

Сама ж перехідна характеристика розподіленої моделі являє собою поверхню в тривимірному просторі, яка показана на рис. 7.

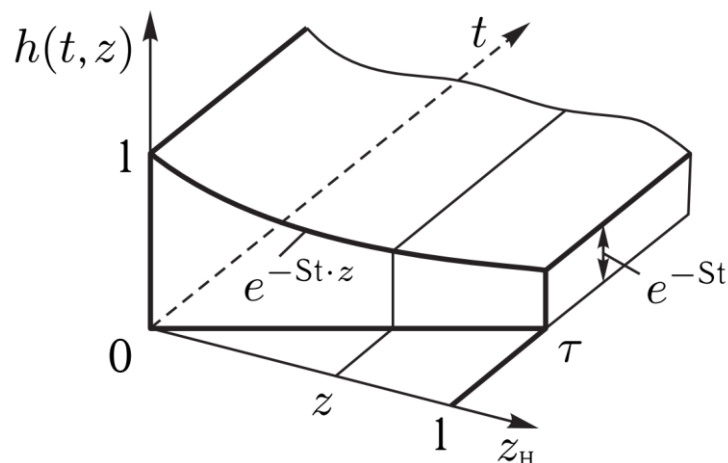


Рис. 7. Перехідна характеристика РП моделі каналу  $i^{п} \rightarrow i$

Годограф комплексної частотної характеристики РП моделі каналу, який визначається формулою  $W_{i^{пi}}(j\omega, z) = e^{-Stz} e^{-j\omega\tau z}$ , також є поверхнею, як це показано на рис. 8.

Годограф (англ. Hodograph, від грецьких слів «ὁδός» – «шлях» і «γράφω» – «пишу») це крива, що з'єднує кінці вектора змінної величини (швидкості, прискорення, сили тощо), відкладеного в різні моменти часу від однієї точки.

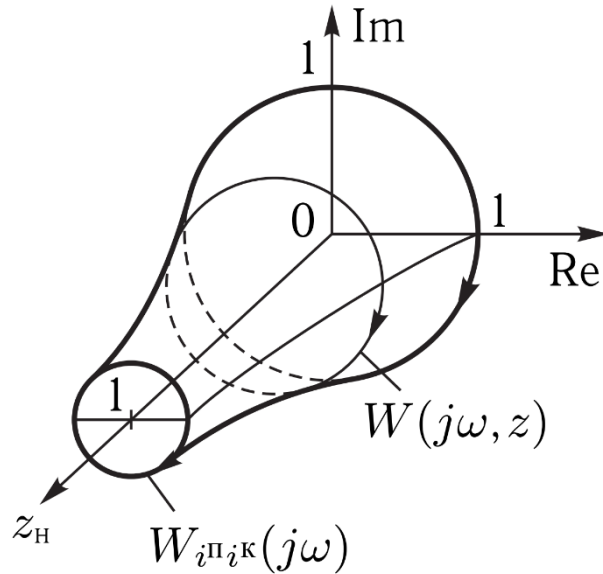


Рис. 8. Комплексна частотна характеристика РП моделі каналу  $i^{II} \rightarrow i$

*Канал  $D \rightarrow i$*

Повернемося до рівняння енергії

$$\tau \frac{\partial(\Delta i)}{\partial t} + \frac{\partial(\Delta i)}{\partial z_H} + St \Delta i = c_P St \Delta \vartheta - k_D \Delta D.$$

і методом подвійного перетворення Лапласа знайдемо динамічні характеристики потоку по каналу витрати  $D \rightarrow i$ . Двічі перетворене рівняння енергії матиме вид:

$$[s + (\tau p + St)]I(p, s) = I^{II}(p) + c_P St \vartheta(p, s) - k_D D(p, s)$$

або маємо:

$$I(p, s) = \frac{1}{s + (\tau p + St)} I^{II}(p) + \frac{c_P St}{s + (\tau p + St)} \vartheta(p, s) - \frac{k_D}{s + (\tau p + St)} D(p, s).$$

При знаходженні характеристик каналу «витрата теплоносія  $D$  – ентальпія  $i$ » врахуємо, що припустимо вважати  $D(z) = const = D$ , тоді його подвійне відображення по Лапласу дорівнюватиме

$$D(p, s) = \frac{D(p)}{s}.$$

Підставимо цей вираз в рівняння каналу

$$I(p, s) = W_{Di}(p, s)D(p, s) = -\frac{k_D}{s[s + (\tau p + St)]} D(p).$$

Виконаємо зворотнє перетворення щодо  $s$ :

$$I(p, z) = -\frac{k_D}{\tau p + St} [1 - e^{-(\tau p + St)z}] D(p),$$

отримуємо вираз для функції передачі каналу:

$$W_{Di}(p, z) = -\frac{k_D}{\tau p + St} [1 - e^{-(\tau p + St)z}] = -\frac{k_D}{\tau p + St} [1 - W_{i\pi i}(p, z)].$$

Приклад годографу комплексної частотної характеристики для ентальпії потоку на виході  $I^k$  (при  $z = 1$ ) показані на рис. 10.

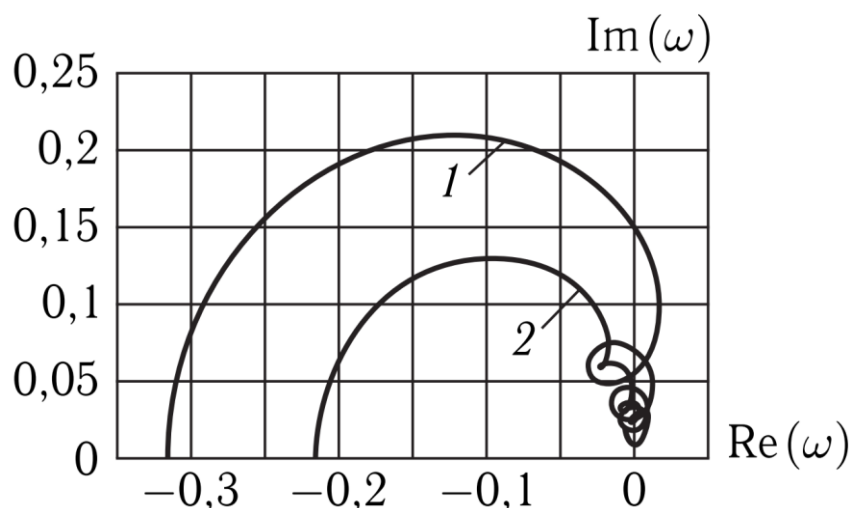


Рис. 10. Комплексна частотна характеристика РП моделі каналу  $D \rightarrow i^k$ :

1 –  $k_D = 0,5$ ;  $\tau = 4$  с;  $St = 1$ ; 2 –  $k_D = 0,5$ ;  $\tau = 8$  с;  $St = 2$

Крива 1 відповідає в два рази меншій довжині труби. Зі збільшенням  $L$  (зі збільшенням розмірів поверхні теплообміну) комплексна частотна характеристика згладжується (крива 2) і не має яскраво виражених петель.

Перехідна характеристика потоку також легко визначається по з'єднанню ланок

$$h_{Di}(t, z) = -\frac{k_D}{St} \left\{ [1 - e^{-t St / \tau}] \cdot 1(t) - e^{-St \cdot z} [1 - e^{-(t - \tau z) St / \tau}] \cdot 1(t - \tau z) \right\},$$

її графік для ентальпії на виході  $i^k$  представлений на рис. 11.

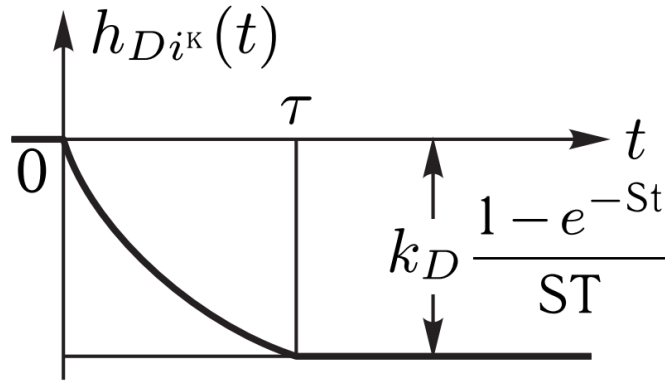


Рис. 11. Перехідна характеристика РП моделі каналу  $D \rightarrow i^k$

Слід особливо відзначити, що коефіцієнт  $k_D = [(\partial i / \partial z) / D]_0$  в загальному випадку залежить від координати  $z$  і може бути визначений тільки при спільному вирішенні рівнянь енергії потоку, стінки та зовнішнього теплоносія (для конвективних теплообмінників). В разі радіаційних теплообмінників і активної зони реакторів при припущенні про рівномірність тепlopідводу  $q_p(z) = const$ , ентальпія потоку змінюється в статиці лінійно і її похідна постійна по довжині  $(\partial i / \partial z)_0 = Hq_p / D_0 = const$ .

### Динамічні характеристики точкової ЗП моделі

Аналогічно викладеному у попередньому розділі, запишемо рівняння енергії потоку в лінійному наближенні:

$$\tau \frac{d\Delta \bar{i}}{dt} + \Delta i^k + St \Delta \bar{i} = \Delta i^n + c_P St \Delta \bar{\vartheta} - \bar{k}_D \Delta D.$$

Дане рівняння буде виступати основою для отримання динамічних характеристик по всіх каналах, в тому числі й зміни температури стінки, так як невизначеність, пов'язана з розподілом температури  $\Delta \vartheta$  по довжині в точковій моделі відсутня.

$$\text{Канал } i^{\Pi} \rightarrow i^k$$

Розглянемо динаміку при припущенні про рівність середнього інтегрального значення ентальпії кінцевому значенню  $\Delta \bar{i} = \Delta i^k$  (модель ЗП, що відповідає моделі ідеального перемішування).

Рівняння каналу отримаємо, вважаючи що  $\Delta \bar{\vartheta} = 0, \Delta D = 0$ :

$$\tau \frac{d\Delta i^K}{dt} + \Delta i^K + St \Delta i^K = \Delta i^П.$$

Перетворимо його по Лапласу при нульових початкових умовах:

$$\tau p I^K(p) + (1 + St) I^K(p) = I^П(p).$$

Функція передачі каналу

$$W_{i^П i^K}(p) = \frac{1}{\tau p + 1 + St}$$

відповідає аперіодичній ланці з коефіцієнтом передачі  $\frac{1}{1 + St}$  і постійній часу  $\frac{\tau}{1 + St}$ .

Порівнюючи функцію передачі моделі точкового наближення з функцією передачі розподіленої моделі, можна зробити висновок, що точкова модель не тільки дає похибку в динаміці, але і завищує коефіцієнт посилення:

$$K_{РП} = e^{-St} = \frac{1}{1 + St + \frac{St^2}{2!} + \dots} \leq K_{ЗП} = \frac{1}{1 + St};$$

рівність коефіцієнтів посилення буде тільки при  $St = 0$ . Для  $St = 0,5$  коефіцієнти передачі  $K_{РП} = 0.606$  і  $K_{ЗП} = 0.6$ , тобто похибка моделі ЗП становить 10%. Зі збільшенням значення числа Стентона похибка зростає необмежено.

Для наочного зіставлення моделей на рис. 12 показані перехідні характеристики, а на рис. 13 – годографи комплексних частотних характеристик.

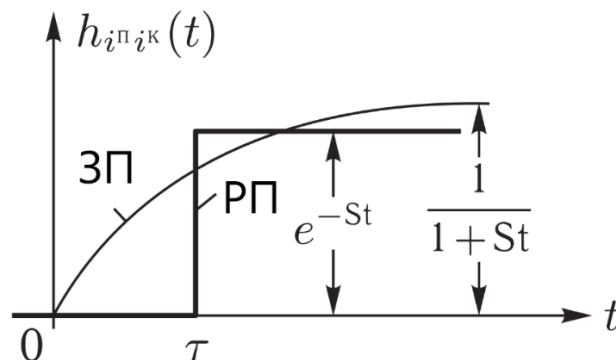


Рис. 12. Перехідні характеристики ЗП і РП моделей каналу  $i^П \rightarrow i^K$

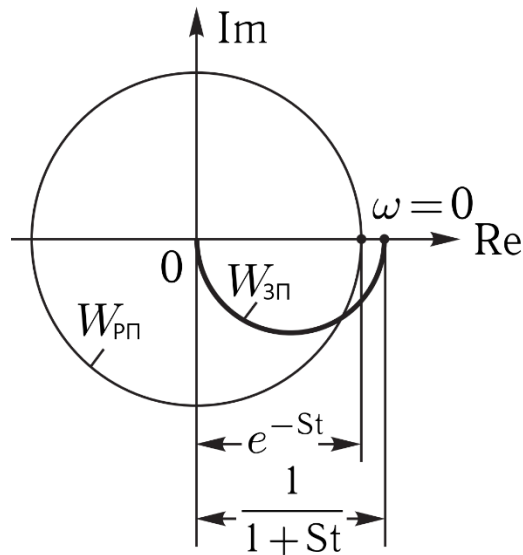


Рис. 13. Комплексна частотна характеристика ЗП і РП моделей каналу  $i^{\Pi} \rightarrow i^K$

З зіставлення кривих видно, що припущення про зосереджені параметри призводить до значного погіршення якості моделі. Тому моделями точкового наближення потоку слід користуватися з великою обережністю і застосовувати їх тільки в тих випадках, коли число Стентона є невеликим (не більше 0.5).

Для заданого теплообмінника точкова модель дасть меншу похибка при високих навантаженнях; похибка моделі буде зростати зі зменшенням навантаження.

$$\text{Канал } D \rightarrow i^K$$

Розглянемо динаміку каналу при припущенні  $\Delta \bar{i} = \Delta i^K$ . Рівняння каналу отримаємо з рівняння енергії потоку в лінійному наближенні, вважаючи  $\Delta \bar{\vartheta} = 0, \Delta \dot{i}^{\Pi} = 0$ :

$$\tau \frac{d\Delta i^K}{dt} + \Delta i^K + St \Delta i^K = -\bar{k}_D \Delta D.$$

Перетворимо рівняння по Лапласа при нульових початкових умовах:

$$\tau p I^K(p) + (1 + St) I^K(p) = -\bar{k}_D D(p).$$

Функція передачі каналу

$$W_{Di^K}(p) = -\frac{\bar{k}_D}{\tau p + 1 + St}$$

відповідає аперіодичній ланці з коефіцієнтом передачі  $K_{зп} = \frac{\bar{k}_D}{1+St}$  і постійній часу  $\frac{\tau}{1+St}$ .

Графіки перехідних і частотних характеристик точкової і розподіленої моделі показані на рис. 14, а і б відповідно.

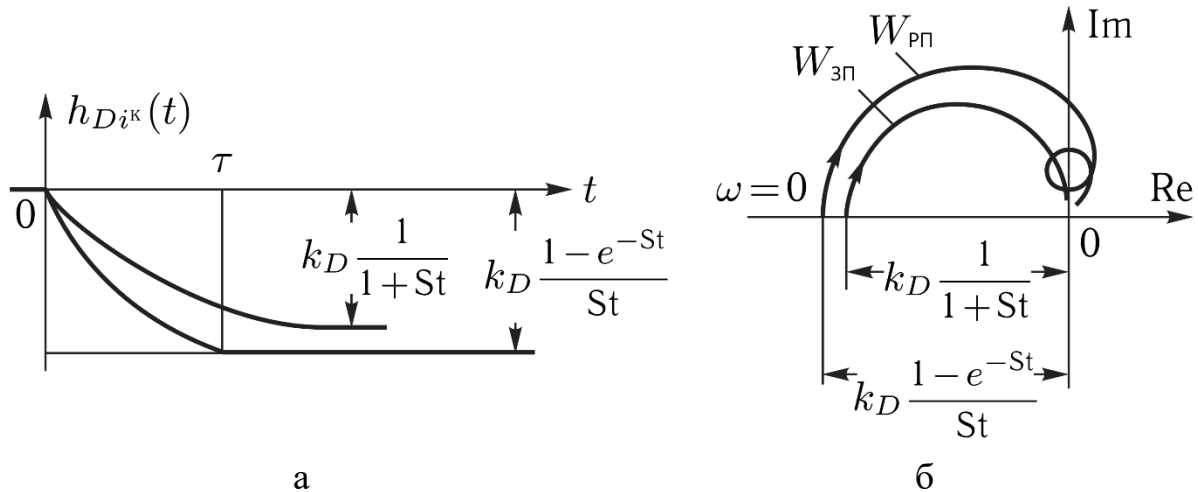


Рис. 14. Перехідні (а) та частотні (б) характеристики ЗП і РП моделей каналу  $D \rightarrow i^k$

Порівнюючи функцію передачі моделі точкового наближення з функцією передачі розподіленої моделі, можна зробити висновок, що точкова модель відрізняється від розподіленої не тільки в динаміці, що є логічним, але і в статиці. Коефіцієнт посилення РП моделі представимо розкладанням показникової функції в нескінченний степеневий ряд:

$$\begin{aligned} K_{РП} &= -\frac{\bar{k}_D}{St} (1 - e^{-St}) = -\frac{\bar{k}_D}{St} \left[ 1 - \left( 1 - St + \frac{St^2}{2!} - \dots \right) \right] = \\ &= -\bar{k}_D \left( 1 - \frac{St}{2!} + \frac{St^2}{3!} - \dots \right) \leq K_{ЗП} = -\frac{\bar{k}_D}{1+St} = \\ &= -\bar{k}_D (1 - St + St^2 - \dots). \end{aligned}$$

Максимальна похибка в 23% досягається при значенні  $St = 2$ .

## Характеристики моделей теплових процесів стінки труб

### Статичні характеристики РП моделі стінки

У статичному наближенні для циліндричної РП моделі стінки

$$\rho_m c_m \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \lambda \left( \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right)$$

отримуємо

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} = 0$$

Для плоскої стінки

$$\rho_m c_m \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2}$$

маємо

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} = 0.$$

Оскільки в розрахунках широко практикується заміна моделі циліндричної стінки моделлю плоскої стінки, розглянемо допустимість такої заміни на основі аналізу виникаючих похибок в статистиці.

### Циліндрична стінка

Розглянемо спочатку радіаційну поверхню нагріву з крайовими умовами у вигляді заданого радіаційного потоку  $q_p = q_1$  для зовнішньої поверхні труби і температури теплоносія  $\theta_2$  – для внутрішньої поверхні. Приймемо припущення про сталість коефіцієнта температуропровідності  $a = \lambda / (\rho_m c_m)$ , що перетворить рівняння на лінійне відносно похідних. Врахуємо, що тепловий потік направлений протилежно осі  $r$ , тому в рівнянні Фур'є слід замінити диференціал  $\partial r$  на  $-\partial r$ :

$$q = +\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial r}.$$

Розв'язок рівняння

$$\rho_m c_m \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \lambda \left( \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right)$$

в такому випадку приводить до наступних співвідношеннях:



$$qr = q_1 r_1 = q_2 r_2 = \text{const};$$

$$\vartheta(r) = \theta_2 + q_p r_1 \left[ \frac{1}{\alpha_2 r_2} + \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{r}{r_2} \right) \right].$$

З наведених рівнянь видно, що щільність теплового потоку  $q$  має гіперболічний характер розподілу, а розподіл температури  $\vartheta(r)$  по товщині циліндричної стінки має логарифмічний характер.

У разі конвективної поверхні нагрівання граничними умовами є температури теплоносіїв  $\theta_1$  і  $\theta_2$ . Вираз для розподілу температури по товщині циліндричної стінки в цьому випадку приймає вид

$$\vartheta(r) = \frac{\left[ \frac{1}{\alpha_2 r_2} + \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{r}{r_2} \right) \right] \theta_1 + \left[ \frac{1}{\alpha_1 r_1} + \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{r_1}{r} \right) \right] \theta_2}{\frac{1}{\alpha_1 r_1} + \frac{1}{\alpha_2 r_2} + \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{r_1}{r_2} \right)}.$$

З формули видно, що розподіл температури  $\theta(r)$  по товщині циліндричної стінки має, як і в разі радіаційної поверхні, логарифмічний характер.

### Плоска стінка

Спочатку знайдемо розв'язок рівняння статичної плоскої стінки радіаційної поверхні при тих же припущеннях, що і для циліндричної стінки. У рівнянні Фур'є замінимо диференціал  $\partial u$  на  $-\partial u$ , так як напрямок відліку координати  $y$  і напрямок поширення теплового потоку  $q$  протилежні:

$$q = +\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial y}.$$

Інтегрування рівняння  $\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} = 0$  приводить до наступних залежностей:

$$q(y) = q_p = \text{const};$$

$$\vartheta(y) = \theta_2 + q_p \left( \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\lambda} y \right).$$

Таким чином, зміна питомого теплового потоку по товщині плоскої стінки відсутня, а зміна температури має лінійний характер.

У разі конвективної поверхні нагрівання отримаємо:

$$\vartheta(y) = \frac{\left(\frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\lambda} y\right) \theta_1 + \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\lambda} (\delta - y)\right) \theta_2}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{\delta}{\lambda}}.$$

Оцінімо похибки, що вносяться моделлю плоскої стінки на прикладі радіаційної поверхні. Величина питомої теплового потоку на зовнішній поверхні обох стінок однакова і дорівнює радіаційному потоку  $q_p = q_1$ . На внутрішній поверхні відмінність потоків є максимальною:

$$\Delta_q = \frac{q_2^{\text{цил}} - q_2^{\text{пл}}}{q_2^{\text{цил}}} = 1 - \frac{r_2}{r_1} = \frac{\delta}{r_1}.$$

Відносна похибка розрахунку перепаду температур на внутрішній поверхні  $(\vartheta_2 - \theta_2)$  також буде дорівнює величині  $\Delta_q$ .

Для поверхонь нагріву в котлах надкритичних параметрів ця похибка особливо помітна і може становити 30 - 40%, так як відношення  $\frac{\delta}{D_{\text{зовн}}}$  у них рівне 0.15 - 0.2. Зрозуміло, що такі похибки в конструктивних і перевірочних розрахунках неприпустимі, і моделлю плоскої стінки користуватися не коректно.

### **Динамічні характеристики РП моделі плоскої стінки**

Функції передачі РП моделі циліндричної стінки складаються з функцій Бесселя нульового і першого роду [5, 6]. Функції Бесселя, як відомо, представляються у вигляді експотенційних, степеневих або гармонійних рядів, що викликає значні труднощі при обчисленні перехідних процесів. Наявні в довідниках спеціальних функцій таблиці функцій Бесселя мало спрощують це завдання. Тому розглянемо динамічні характеристики моделей плоскої стінки, хоча й вони для розподілених параметрів не є простими.

Динамічну складову  $\Delta\vartheta(t, y)$  будемо шукати з рівняння плоскої стінки, записаного в приростах до стаціонарного режиму,

$$\rho_m c_m \frac{\partial \Delta\vartheta}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 \Delta\vartheta}{\partial y^2} = 0.$$

### **Радіаційний теплообмінник**

Прийmemo наступні граничні умови – температура теплоносія  $\theta_2$  для внутрішньої поверхні і питомий тепловий потік  $q_1 = q_p$  для зовнішньої

поверхні. Перетворимо по Лапласу  $L_t$  рівняння  $\rho_M c_M \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2}$ , враховуючи, що початкові умови рівні нулю

$$\frac{\partial^2 \vartheta(p, y)}{\partial y^2} - \frac{p}{a} \vartheta(p, y) = 0.$$

Тут, як і раніше, коефіцієнт теплопровідності  $a = \frac{\lambda}{\rho_M c_M}$ .

Характеристичне рівняння

$$r^2 - p/a = 0$$

має два різних кореня

$$r_{1;2} = \pm \sqrt{p/a} = \pm r.$$

Загальне розв'язок має вигляд

$$\vartheta(p, y) = C_1 e^{ry} + C_2 e^{-ry},$$

причому, для  $y = 0$  можна записати

$$\vartheta(p, 0) = \vartheta_2(p) = C_1 + C_2.$$

Для визначення постійних інтегрування  $C_1$  і  $C_2$  використовуємо рівняння Фур'є і рівняння тепловіддачі на границях:

$$\left. \frac{\partial \vartheta(p)}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{q_2(p)}{\lambda} = \frac{\alpha_2}{\lambda} [\vartheta_2(p) - \theta_2(p)],$$

$$\left. \frac{\partial \vartheta(p)}{\partial y} \right|_{y=\delta} = \frac{q_1(p)}{\lambda}.$$

З іншого боку, диференціюючи по  $y$  спільний розв'язок

$$\frac{\partial}{\partial y} \vartheta(p, y) = C_1 r e^{ry} - r C_2 e^{-ry}$$

і прирівнявши вирази для похідної в перерізах  $y = 0$  і  $y = \delta$  до граничних умов, отримаємо:

$$\left. \frac{\partial \vartheta(p)}{\partial y} \right|_{y=0} = C_1 r - C_2 r = \frac{\alpha_2}{\lambda} [(C_1 + C_2) - \theta_2(p)],$$

$$\left. \frac{\partial \vartheta(p)}{\partial y} \right|_{y=\delta} = C_1 r e^{r\delta} - C_2 r e^{-r\delta} = \frac{q_1(p)}{\lambda}.$$

Розв'язок наведених вище рівнянь дає вираз для відображення температури стінки в довільному перерізі  $y$ :

$$\vartheta(p, y) = \frac{\operatorname{ch}[(\delta - y)r]}{\operatorname{ch}(r\delta) + \frac{\lambda r}{\alpha_2} \operatorname{sh}(r\delta)} \theta_2(p) + \frac{\frac{1}{\alpha_2} \operatorname{ch}(yr) + \frac{1}{\lambda r} \operatorname{sh}(yr)}{\operatorname{ch}(r\delta) + \frac{\lambda r}{\alpha_2} \operatorname{sh}(r\delta)} q_1(p),$$

де для скорочення запису введені гіперболічні функції

$$\operatorname{sh}(r\delta) = \frac{1}{2} (e^{r\delta} - e^{-r\delta}), \quad \operatorname{ch}(r\delta) = \frac{1}{2} (e^{r\delta} + e^{-r\delta}).$$

Отримана формула дозволяє розрахувати функції передачі температури стінки в будь-якому перетині у по двом каналам – для впливу по температурі теплоносія  $\theta_2$  та для радіаційного потоку  $q_p$ :

$$W_{\theta_2 \vartheta}(p, y) = \frac{\vartheta(p, y)}{\theta_2(p)} = \frac{\operatorname{ch}[(\delta - y)\sqrt{p/a}]}{\operatorname{ch}(\delta\sqrt{p/a}) + \frac{\lambda r}{\alpha_2} \operatorname{sh}(\delta\sqrt{p/a})},$$

$$W_{q_p \vartheta}(p, y) = \frac{\vartheta(p, y)}{q_p(p)} = \frac{\frac{1}{\alpha_2} \operatorname{ch}(y\sqrt{p/a}) + \frac{1}{\lambda r} \operatorname{sh}(y\sqrt{p/a})}{\operatorname{ch}(\delta\sqrt{p/a}) + \frac{\lambda r}{\alpha_2} \operatorname{sh}(\delta\sqrt{p/a})}.$$

Тут виконана підстановка кореня  $r = \sqrt{\frac{p}{a}}$  і заміна індексів для питомого теплового потоку на зовнішній поверхні  $q_1 = q_p$ . Щоб отримати функції передачі для температури  $\vartheta_2$  на внутрішній поверхні стінки, в рівняння слід підставити значення  $y = 0$ , а щоб отримати функції передачі для температури  $\vartheta_1$  на зовнішній поверхні стінки, слід підставити  $y = \delta$ .

### Конвективний теплообмінник

У разі чисто конвективного теплообмінника спільний розв'язок рівняння теплопровідності має вигляд

$$\vartheta(p, y) = C_1 e^{ry} + C_2 e^{-ry},$$

але для знаходження постійних інтегрування задаються граничні умови третього роду – температури зовнішнього  $\theta_1$  і внутрішнього  $\theta_2$  теплоносіїв.

Вважаємо, що підігрів буде здійснюватися зовнішнім теплоносієм, тобто напрям поширення теплового потоку буде протилежним напрямку відліку просторової координати у:

$$\left. \frac{\partial \vartheta(p)}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{q_2(p)}{\lambda} = \frac{\alpha_2}{\lambda} [\vartheta_2(p) - \theta_2(p)],$$

$$\left. \frac{\partial \vartheta(p)}{\partial y} \right|_{y=\delta} = \frac{q_1(p)}{\lambda} = \frac{\alpha_1}{\lambda} [\theta_1(p) - \vartheta_1(p)].$$

Врахуємо, що для  $y = 0$

$$\vartheta(p, 0) = \vartheta_2(p) = C_1 + C_2,$$

а для  $y = \delta$

$$\vartheta(p, \delta) = \vartheta_1(p) = C_1 e^{r\delta} + C_2 e^{-r\delta},$$

тоді граничні умови можна записати в такому вигляді

$$\left. \frac{\partial \vartheta(p)}{\partial y} \right|_{y=0} = C_1 r - C_2 r = \frac{\alpha_2}{\lambda} [(C_1 + C_2) - \theta_2(p)],$$

$$\left. \frac{\partial \vartheta(p)}{\partial y} \right|_{y=\delta} = C_1 r e^{r\delta} - C_2 r e^{-r\delta} = \frac{\alpha_1}{\lambda} [\theta_1(p) - (C_1 e^{r\delta} + C_2 e^{-r\delta})].$$

Розв'язуючи дану систему відносно невідомих постійних інтегрування  $C_1$  і  $C_2$  і підставивши їх в загальний розв'язок для температури стінки  $\vartheta(p, y)$ , отримаємо

$$\vartheta(p, y) = \frac{\left\{ \frac{\lambda r}{\alpha_1} \operatorname{ch}[r(\delta - y)] + \operatorname{sh}[r(\delta - y)] \right\} \theta_2(p) + \left[ \frac{\lambda r}{\alpha_2} \operatorname{ch}(ry) + \operatorname{sh}(ry) \right] \theta_1(p)}{\left( \frac{\lambda r}{\alpha_1} + \frac{\lambda r}{\alpha_2} \right) \operatorname{ch}(r\delta) + \left( \frac{\lambda r}{\alpha_1} \frac{\lambda r}{\alpha_2} + 1 \right) \operatorname{sh}(r\delta)}.$$

Звідси знаходимо вирази функцій передачі:

$$W_{\theta_2 \vartheta}(p, y) = \frac{\vartheta(p, y)}{\theta_2(p)} = \frac{\frac{\lambda r}{\alpha_1} \operatorname{ch}[r(\delta - y)] + \operatorname{sh}[r(\delta - y)]}{\left( \frac{\lambda r}{\alpha_1} + \frac{\lambda r}{\alpha_2} \right) \operatorname{ch}(r\delta) + \left( \frac{\lambda r}{\alpha_1} \frac{\lambda r}{\alpha_2} + 1 \right) \operatorname{sh}(r\delta)};$$

$$W_{\theta_1 \vartheta}(p, y) = \frac{\vartheta(p, y)}{\theta_1(p)} = \frac{\frac{\lambda r}{\alpha_2} \operatorname{ch}(ry) + \operatorname{sh}(ry)}{\left( \frac{\lambda r}{\alpha_1} + \frac{\lambda r}{\alpha_2} \right) \operatorname{ch}(r\delta) + \left( \frac{\lambda r}{\alpha_1} \frac{\lambda r}{\alpha_2} + 1 \right) \operatorname{sh}(r\delta)},$$

$$\text{де } r = \sqrt{\frac{p}{a}}.$$

Із наведених вище загальних формул витікають окремі випадки для внутрішньої  $\vartheta_2$  і зовнішньої  $\vartheta_1$  температур плоскої стінки.

### Динамічні характеристики точкової моделі стінки

Модель точкового наближення, що дає рівність температур при будь-якому значенні  $y$ , можна отримати лише при припущенні про нескінченно великий коефіцієнт теплопровідності  $\lambda \rightarrow \infty$ , тобто про відсутність теплового опору стінки [12].

З рівняння Фур'є для гріючого зовнішнього теплоносія  $q = \lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial y}$

випливає, що при кінцевому значенні питомого теплового потоку  $q$  похідна  $\partial \vartheta / \partial y$  повинна бути тотожно рівна нулю

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial y} \equiv 0,$$

отже, температура стінки в цій моделі  $\vartheta(y) = \text{const}$  і залежить тільки від часу (та просторової координати  $z$ , що в явному вигляді не входить в рівняння теплопровідності).

Підставимо в рівняння теплопровідності плоскої стінки

$$\rho_M c_M \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2}$$

замість похідної  $\frac{\partial \Delta \vartheta}{\partial y}$  величину  $\frac{\Delta q}{\lambda}$

$$\rho_M c_M \frac{\partial \Delta \vartheta}{\partial t} = \frac{\partial \Delta q}{\partial y}.$$

Проінтегруємо рівняння з урахуванням вище вказаного по всьому діапазону зміни  $y$

$$\rho_M c_M \frac{\partial \Delta \vartheta}{\partial t} \int_0^\delta \partial y = \int_0^\delta \partial \Delta q,$$

маємо

$$\rho_M c_M \delta \frac{d \Delta \vartheta}{dt} = \Delta q_1 - \Delta q_2.$$

Тут  $\Delta q_1 = \Delta q$  ( $y = \delta$ ) і  $\Delta q_2 = \Delta q$  ( $y = 0$ ).

Отже, точкова модель плоскої стінки – це звичайне лінійне диференціальне рівняння. Конкретний вид цього рівняння буде залежати від типу теплообмінника.

У разі радіаційної поверхні нагріву, наприклад котлів,

$$\Delta q_1 = \Delta q_p, \quad \Delta q_2 = \alpha_2 (\Delta \vartheta - \Delta \theta_2),$$

а рівняння енергії набуде вигляду

$$\rho_M c_M \delta \frac{d \Delta \vartheta}{dt} = \Delta q_p - \alpha_2 (\Delta \vartheta - \Delta \theta_2)$$

або

$$T_M \frac{d \Delta \vartheta}{dt} + \Delta \vartheta = \frac{1}{\alpha_2} \Delta q_p + \Delta \theta_2,$$

де  $T_M = \frac{\rho_M c_M \delta}{\alpha_2}$  – постійна часу металу стінки.

Функції передачі по каналах вхідних впливів  $q_p$  і  $\theta_2$  будуть в цьому випадку рівні

$$W_{q_p\vartheta}(p) = \frac{1/\alpha_2}{T_M p + 1}$$

та

$$W_{\theta_2\vartheta}(p) = \frac{1}{T_M p + 1}.$$

У випадку конвективної поверхні нагрівання в рівняння енергії для питомих теплових потоків слід підставити вирази

$$\Delta q_1 = \alpha_1(\Delta\theta_1 - \Delta\vartheta), \Delta q_2 = \alpha_2(\Delta\vartheta - \Delta\theta_2),$$

тоді

$$\rho_M c_M \delta \frac{\partial \Delta\vartheta}{\partial t} = \alpha_1(\Delta\theta_1 - \Delta\vartheta) - \alpha_2(\Delta\vartheta - \Delta\theta_2)$$

або

$$T_M \frac{\partial \Delta\vartheta}{\partial t} + \Delta\vartheta = k_1 \Delta\theta_1 + k_2 \Delta\theta_2,$$

де  $T_M = \frac{\rho_M c_M \delta}{\alpha_1 + \alpha_2}$  – постійна часу металу стінки,  $k_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}$  – коефіцієнт передачі

по каналу  $\theta_1 \rightarrow \vartheta$ ,  $k_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$  – коефіцієнт передачі по каналу  $\theta_2 \rightarrow \vartheta$ .

Отже, отримано рівняння аперіодичної ланки з функціями передачі щодо входів виду

$$W_{\theta_1\vartheta}(p) = \frac{k_1}{T_M p + 1}$$

та

$$W_{\theta_2\vartheta}(p) = \frac{k_2}{T_M p + 1}.$$

### Порівняння моделей різного ступеня наближення

У попередніх параграфах визначені функції передачі моделей теплопередаючої стінки різного ступеня наближення, що істотно відрізняються за складністю. Найбільш складною є динамічна модель циліндричної стінки. елементарно простою виявилася модель стінки з зосередженими параметрами. Маючи на меті отримання якомога простішої моделі теплообмінника, виконаємо порівняння динамічних характеристик різних моделей стінки.

На рис. 15 показані годографи комплексних частотних характеристик радіаційного теплообмінника (РТО)  $W_{\theta_2 g_2}(j\omega)$  і  $W_{\theta_2 g_1}(j\omega)$  для внутрішньої  $g_2$  і зовнішньої  $g_1$  температур теплопередаючої стінки при збуренні по температурі потоку  $\theta_2$  для наступних параметрів:  $\delta = 4$  мм,  $r_1 = 16$  мм,  $\alpha_2 = 4$  кВт / (м<sup>2</sup> °С),  $\lambda = 0,05$  кВт / (м °С). Суцільними лініями представлені годографи розподіленої (РП) моделі циліндричної стінки [6], точками – годографи розподіленої моделі плоскої стінки, пунктирною лінією – годограф ЗП моделі з зосередженими параметрами [6].

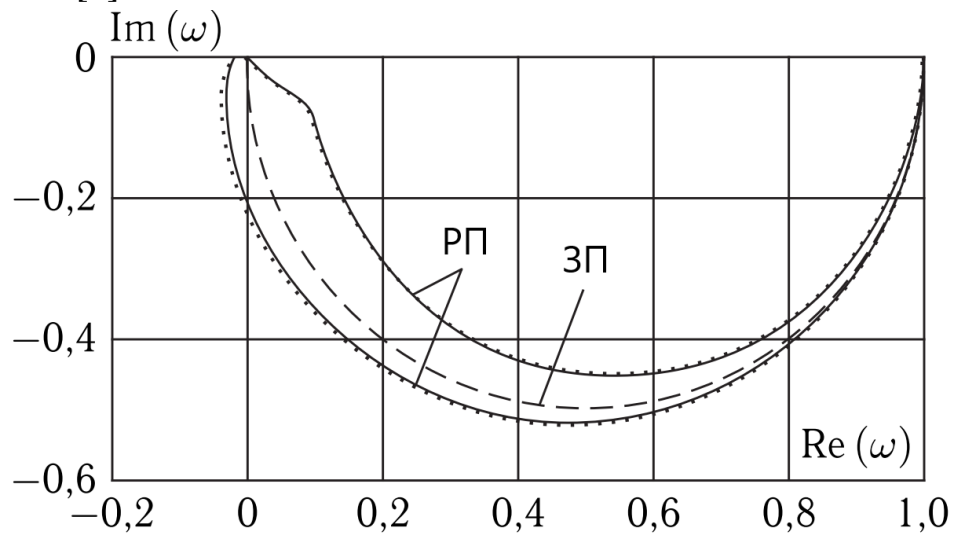


Рис. 15. Комплексні частотні характеристики моделей стінки радіаційного теплообмінника відносно температури потоку для  $\delta = 4$  мм

Аналізуючи результати розрахунків, відзначимо, що коефіцієнти посилення всіх моделей однакові і дорівнюють одиниці. Відрізняються лише динамічні властивості температур, причому, як і слід було очікувати, інерційність температури зовнішньої поверхні  $g_1$  більше інерційності внутрішньої температури  $g_2$ . РП модель плоскої стінки дає практично таку ж характеристику, як і РП модель циліндричної стінки. ЗП модель плоскої стінки не має похибки в статичі і дає усереднене уявлення динаміки (годограф КЧХ ЗП моделі розташовується між годографом внутрішньої  $g_2$  і зовнішньої  $g_1$  температур стінки РП моделей).

Різниця між ЗП і РП моделями буде тим менше, чим менше коефіцієнт тепловіддачі  $\alpha_2$  і товщина стінки  $\delta$ . Годографи  $W_{\theta_2 g_2}(j\omega)$  і  $W_{\theta_2 g_1}(j\omega)$  зі зменшенням значення  $\alpha_2$  зближуються.

Таким чином, на відміну від розрахунків статички при розрахунках динаміки теплообмінних поверхонь замість РП моделі циліндричної стінки цілком допустимо використання більш простий РП моделі плоскої стінки. Можливість використання ЗП моделі стінки може бути з'ясована лише при розрахунку динаміки теплообмінників в цілому.



## **Моделі теплообмінників з розподіленими і зосередженими параметрами**

Математичні моделі теплообмінних пристроїв наряду залежать від їх принципу дії і конструктивних особливостей. У даному розділі розглянуто теплообмінні пристрої рекуперативного типу, що представляють більшість існуючих в енергетиці теплообмінників. До їх числа відносяться як апарати самостійного призначення (підігрівачі, парогенератори тощо), так і окремі поверхні нагрівання котлів або прямоточних парогенераторів. Теплообмінні пристрої можуть мати прямоточні, протиточні або змішані схеми руху теплоносіїв, з радіаційним та (або) конвективним теплообміном.

### **Узагальнена математична модель теплообмінника**

Реальний теплообмінний пристрій в загальному випадку складається з трубної системи (поверхні нагрівання) і корпусу (оболонки). Зовні і зсередини труби омиваються теплоносієм, один з яких гріє, інший нагрівається.

Щоб моделювання було в принципі можливим, приймається припущення, що всі труби знаходяться в однакових умовах. Тому математична модель теплообмінника з  $n$ -трубним пучком може бути замінена моделлю однієї труби з масовими витратами і об'ємами теплоносіїв в  $n$  разів меншими або моделлю у вигляді однієї еквівалентної труби з повними витратами, об'ємами теплоносіїв і повною поверхнею теплообміну [3,13].

Відповідно до рекомендацій наведених у попередньому розділі, перш за все, слід визначити всі середовища теплообмінника, що мають різні фізичні властивості або відрізняються умовами теплообміну. Потім для кожного твердого середовища необхідно записати рівняння закону збереження енергії (теплопровідності), а для кожного рідкого або газоподібного середовища – по три диференціальних рівняння законів збереження речовини, енергії і кількості руху. Перерахована система диференціальних рівнянь складе основу математичної моделі теплообмінника. Рівняння повинні бути доповнені алгебраїчними співвідношеннями змінних, що входять до них таким чином, щоб кількість залежних змінних була рівна кількості рівнянь.

У загальному випадку число рідких або газоподібних середовищ може змінюватися від одного (радіаційний або йому подібний теплообмінник з однофазним теплоносієм) до декількох (випадки конвективного теплообмінника, теплоносіїв на лінії насичення, теплоносіїв у вигляді розчинів або сумішей).

До числа твердих середовищ можна віднести метал труб, корпус, «неактивний» метал кріплення трубних пучків, шари шлаку, накипу тощо.

Орієнтуючись на теплообмінники теплових і атомних електростанцій, розглянемо модель радіаційно-конвективного теплообмінника з однофазними або тими, що знаходяться на лінії насичення теплоносіями. Будемо вважати, що підігрівачим є зовнішній теплоносій, труби чисті, з малою кривизною стінки, а вплив корпусу на процеси теплообміну відсутні.

Відповідно до сказаного вище, можна записати єдину (для всього різноманіття перерахованих типів теплообмінників) узагальнену математичну модель [3, 5, 14]:

- для зовнішнього теплоносія:

$$V_1 \rho_1 \frac{\partial i_1}{\partial t} + (-1)^H D_1 \frac{\partial i_1}{\partial z_H} = -(q_1 + k^{e\Phi} q_p) H_1, \quad (1)$$

$$V_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + (-1)^H \frac{\partial D_1}{\partial z_H} = 0, \quad (2)$$

$$(-1)^H \frac{\partial P_1}{\partial z_H} + \xi_1 \frac{D_1^2}{\rho_1} = 0, \quad (3)$$

$$q_1 = \alpha_1 (\theta_1 - \vartheta_1), \quad q_p = f(\theta_1^4, \vartheta_1^4), \quad (4)$$

$$\alpha_1 = f(D_1^{m_1}), \quad (5)$$

$$\theta_1 = f(i_1, P_1), \quad (6)$$

$$\rho_1 = f(i_1, P_1), \quad c_{P1} = f(i_1, P_1); \quad (7)$$

- для плоскої стінки труб:

$$\rho_m c_m \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2}, \quad (8)$$

$$\lambda \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)_{y=\delta} = q_1 + k^{e\Phi} q_p, \quad (9)$$

$$\lambda \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)_{y=0} = q_2; \quad (10)$$

- для внутрішнього теплоносія:

$$V_2 \rho_2 \frac{\partial i_2}{\partial t} + D_2 \frac{\partial i_2}{\partial z_H} = q_2 H_2, \quad (11)$$

$$V_2 \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial D_2}{\partial z_H} = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial z_H} + \xi_2 \frac{D_2^2}{\rho_2} = 0, \quad (13)$$

$$q_2 = \alpha_2(\vartheta_2 - \theta_2), \quad (14)$$

$$\alpha_2 = f(D_2^{m_2}), \quad (15)$$

$$\theta_2 = f(i_2, P_2), \quad (16)$$

$$\rho_2 = f(i_2, P_2), \quad c_{P2} = f(i_2, P_2). \quad (17)$$

Співмножник  $(-1)^n$  в рівняннях енергії (1), маси (2) і кількості руху (3) зовнішнього теплоносія дозволяє відобразити схему течії теплоносіїв. Для протиточного теплообмінника напрямку руху зовнішнього теплоносія протилежний напрямку відліку координати  $z$ , що збігається з напрямком руху внутрішнього теплоносія. Отже, приріст  $\partial z$  в рівняннях зовнішнього теплоносія треба замінити на  $-\partial z$ , тобто прийняти показник спрямованості потоків  $n = 1$ . Для прямоточного теплообмінника  $n = 0$ . Однак в разі прямоточно-протиточної схеми руху теплоносіїв слід використовувати дві моделі – для прямоточної і для протиточної частин окремо.

Знак « $-$ » у правій частині рівняння (1) відноситься до випадку, коли зовнішній теплоносій є гріючим. З цієї причини напрямку поширення теплового потоку  $q$  протилежний напрямку зростання координати  $y$  і в рівняннях Фур'є (9) і (10) знак « $-$ » замінений на знак « $+$ ».

Ненульові значення питомих теплових потоків  $q_1$  і  $q_p$  відображають випадок радіаційно-конвективної поверхні теплообміну, причому  $k^{ef}$  – це коефіцієнт ефективності поверхні нагрівання, що враховує меншу опроміненість частини поверхні, не зверненої до джерела променевої енергії ( $k^{ef} \leq 1$ ).

Якщо теплообмін чисто конвективний, то радіаційний потік слід прирівняти до нуля  $q_p = 0$ .

Якщо ж теплообмінник чисто радіаційний (конвективним теплообміном нехтують), то  $q_1 = 0$ .

Формули (5) та (15) справедливі для однофазних теплоносіїв. Значення показника залежить від виду омивання і характеру розташування труб:  $m = 0,8$  – поздовжнє омивання;  $m = 0,64$  – поперечне омивання коридорно розташованих труб;  $m = 0,6$  – поперечне омивання при шаховому розташуванні труб [15].

Якщо зовнішній теплоносіє знаходиться на лінії насичення (конденсація пара або випаровування рідини по об'єму), то коефіцієнт тепловіддачі  $\alpha$  залежить від питомої теплового потоку  $q$  і тиску  $P$ .

Для пароводяного теплоносія на лінії насичення [15]:

$$\alpha = 0,34 P^{0,43} q^{0,7}.$$

Коефіцієнти гідравлічних опорів  $\xi_1$  і  $\xi_2$  слід приймати такими ж, як в реальній схемі, тобто з урахуванням вигинів труб, їх розташування, наявності оребрення тощо.

В узагальненій моделі прийнята плоска стінка, так як вона цілком якісно відображає динаміку теплових процесів поверхонь теплообміну, хоча при необхідності її можна замінити моделлю циліндричної стінки.

У моделі не відображено вплив корпусу на процеси теплообміну.

Якщо корпус металевий, модель повинна бути доповнена рівняннями типу (8), (9) і (10) і для корпусу.

Таким чином, при відсутності впливу корпусу, узагальнена математична модель являє собою систему нелінійних диференціальних рівнянь 6-го порядку щодо нормованої координати довжини  $z$ . Для її розв'язку слід задати 6 граничних умов (вхідних впливів) з набору крайових значень  $D_1^{\Pi}, i_1^{\Pi}, P_1^{\Pi}, D_1^K, i_1^K, P_1^K, D_2^{\Pi}, i_2^{\Pi}, P_2^{\Pi}, D_2^K, i_2^K, P_2^K$ . Індексом « $\Pi$ » (початкові) позначені значення величин для  $z = 0$ , а індексом « $K$ » (кінцеві) – їх значення для  $z = 1$ . У разі протитоку кінцеві значення  $D_1^K, i_1^K, P_1^K$  будуть відповідати вхідним значенням зовнішнього потоку.

Шість обраних граничних умов позначимо вектором вхідних величин  $\mathbf{X}$ , а вся решта змінних величин – вектором вихідних змінних  $\mathbf{Y}$  (рис. 16, *а*).

Структура рис. 16, *а* може бути конкретизована в залежності від типу теплообмінника і обраних граничних умов. Зокрема, для чисто конвективного теплообмінника і вхідних впливів  $D_1^{\Pi}, i_1^{\Pi}, P_1^{\Pi}, D_2^{\Pi}, i_2^{\Pi}, P_2^{\Pi}$ , структурна схема представлена на рис. 16, *б* і складається з чотирьох взаємопов'язаних підсистем (по числу різних за властивостями середовищ) – теплоносіїв 1 (зовнішній) та 2 (внутрішній), стінки і корпусу, якщо їх вплив враховується в моделі.

Для чисто радіаційного теплообмінника при значному перевищенні температури зовнішнього теплоносія  $\theta_1$  температури стінки  $\vartheta_1$ , як це має місце в котлах, можна вважати, що радіаційний потік не залежить від температури стінки  $\vartheta_1$ , тобто

$$q_p = f(\theta_1^4).$$

В цьому випадку радіаційний потік  $q_r$  може розглядатися як вхідний вплив (гранична умова) по відношенню до рівнянь стінки і внутрішнього теплоносія.

Структурна схема для прийнятого припущення видозміниться. Вона являтиме собою дві автономні підсистеми: підсистему «стінка – теплоносій 2 (теплоносій в середині труби)», показану на рис. 16, в, і підсистему «зовнішній теплоносій (теплоносій 1) – корпус», якщо рівняння теплопровідності корпусу включено до складу математичної моделі.

Значне поширення в теплоенергетиці мають теплообмінні апарати з зовнішнім теплоносієм, що знаходяться на лінії насичення (киплячим або тим, що конденсується), для якого температура  $\theta_{1s}$  постійна по координаті  $z$  і визначається тільки значенням тиску насичення  $P_{1s}$ :

$$\theta_{1s} = f(P_{1s}).$$

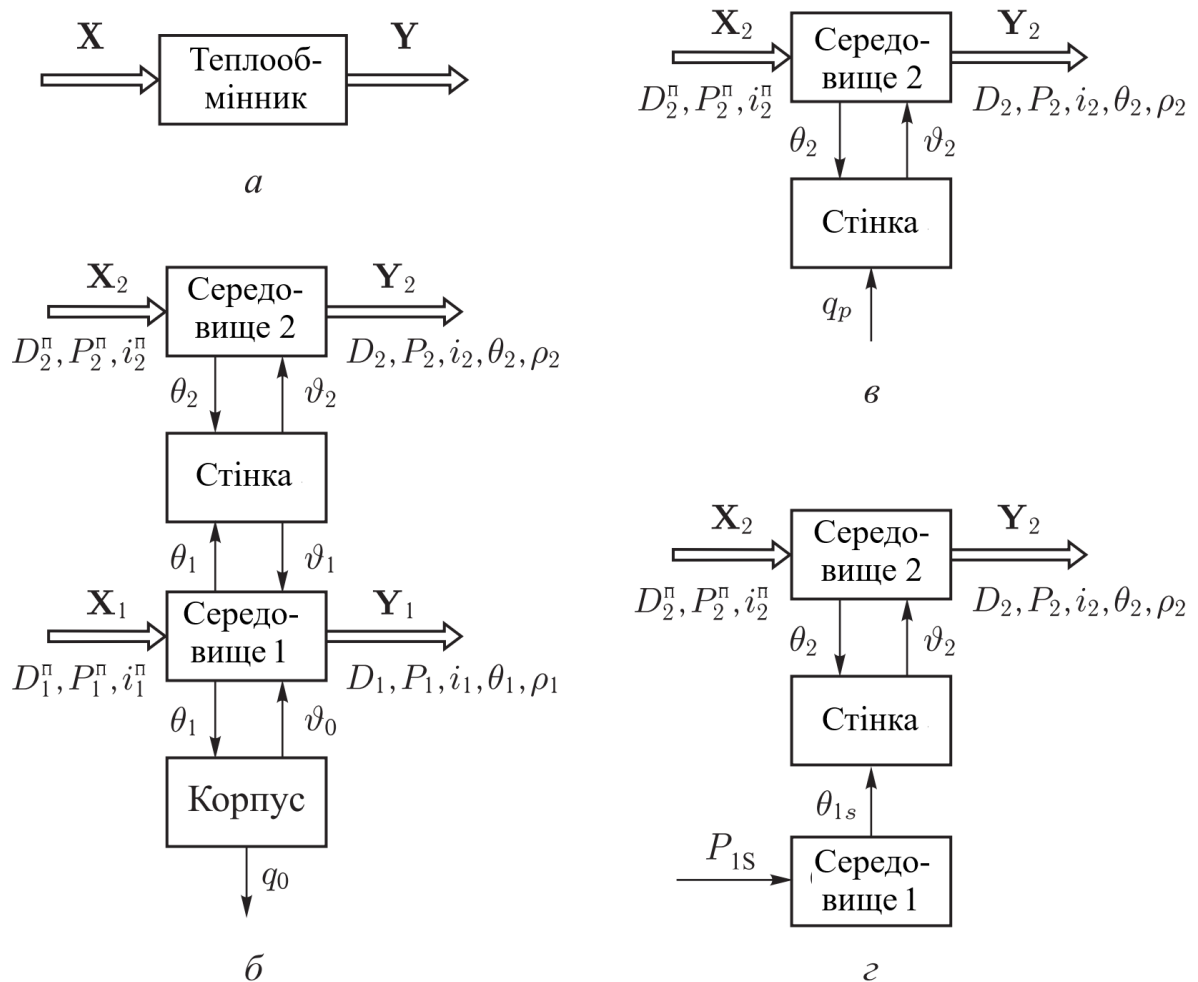


Рис. 16. Структурні схеми теплообмінників: а) загальне уявлення; б) конвективний теплообмінник; в) радіаційний теплообмінник; г) конвективний теплообмінник із зовнішнім теплоносієм на лінії насичення

Якщо прийняти припущення про незалежність тиску  $P_{1s}$  від стану теплообмінника (наприклад, працює регулятор тиску), то в цьому випадку можна обмежитися розглядом тільки підсистеми «стінка – теплоносії 2», розглядаючи температуру насичення  $\theta_{1s}$  в якості вхідного впливу (гранична умова). Структурна схема для прийнятого допущення показана на рис. 6.1, з.

### Методи розв'язку узагальненої моделі

Як відомо, система нелінійних рівнянь узагальненої моделі без урахування впливу корпусу (1) – (17) може бути розв'язана лише чисельним методом шляхом перетворення диференціальних рівнянь в різниці, тобто алгебраїчні, рівняння. При цьому аргументи змінних  $t$ ,  $z$ ,  $y$  замінюються просторовою сіткою дискретних значень (зазвичай рівномірною) з кроком дискретизації  $\Delta t$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$ , а розв'язок системи – значеннями параметрів середовищ  $D$ ,  $i$ ,  $\theta$ ,  $\vartheta$ ,  $P$  в вузлах цієї сітки [16-18].

Проблема чисельного інтегрування узагальненої математичної моделі полягає в тому, що тривалість протікання гідродинамічних процесів (рівняння (2), (3), (12) і (13)) на 1-2 порядки менше тривалості теплових процесів (рівняння (1), (9) і (11)). Вибір кроку дискретності за часом  $\Delta t$  по рівняннях гідродинаміки призводить до значного збільшення кількості обчислень і появи похибок розрахунку, пов'язаних з оперуванням дуже малими приростами на малому інтервалі  $\Delta t$  теплових параметрів  $\Delta i$ ,  $\Delta \theta$  і  $\Delta \vartheta$ . Вибір же кроку  $\Delta t$  по рівнянням енергії не дасть можливості визначити динаміку витрат  $D$  і тисків  $P$ .

З цієї причини вихідну систему рівнянь доводиться розв'язувати із різними кроками дискретності  $\Delta t$  для рівнянь гідродинаміки і рівнянь теплових процесів. Але навіть при такій декомпозиції розв'язку об'єм обчислень виявляється дуже великим, що вимагає аналізу можливостей спрощення математичної моделі.

Одним з можливих шляхів спрощення моделі, часто використовуваного в практиці розрахунків, є декомпозиція, що складається в роздільному моделюванні теплових (що складаються з рівнянь енергії середовищ) і гідродинамічних процесів (що складаються з рівнянь законів збереження речовини і кількості руху) [3, 5].

В цьому випадку узагальнена модель розпадається на три окремі, майже автономні підсистеми:

- модель гідродинаміки теплоносія 1

$$V_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + (-1)^H \frac{\partial D_1}{\partial z_H} = 0,$$

$$(-1)^H \frac{\partial P_1}{\partial z_H} + \xi_1 \frac{D_1^2}{\rho_1} = 0;$$

- модель гідродинаміки теплоносія 2

$$V_2 \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial D_2}{\partial z_H} = 0,$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial z_H} + \xi_2 \frac{D_2^2}{\rho_2} = 0;$$

- модель теплових процесів теплообмінника

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1 \rho_1 \frac{\partial i_1}{\partial t} + (-1)^H D_1 \frac{\partial i_1}{\partial z_H} = -\alpha_1 H_1 (\theta_1 - \vartheta_1) - k^{\text{ef}} q_p H_1, \\ \rho_m c_m \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2}, \\ \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)_{y=\delta} = \frac{\alpha_1}{\lambda} H_1 (\theta_1 - \vartheta_1) + k^{\text{ef}} q_p, \\ \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{\alpha_2}{\lambda} (\vartheta_2 - \theta_2), \\ V_2 \rho_2 \frac{\partial i_2}{\partial t} + D_2 \frac{\partial i_2}{\partial z_H} = \alpha_2 H_2 (\vartheta_2 - \theta_2). \end{array} \right. \quad (18)$$

Спочатку розраховуються рівняння гідродинаміки, в результаті чого отримують поля зміни тиску  $P(t, z)$  і витрати  $D(t, z)$ . Методика аналітичного розв'язку детально викладена в [5, 6]. Потім приступають до розрахунку моделі теплових процесів (18). Якщо врахувати, що гідродинамічні процеси практично безінерційні в порівнянні з тепловими, в розрахунку теплових процесів можна вважати, що витрата однакова по довжині потоку  $D(z) = \text{const}$ , а тиск залежить тільки від координати  $z$ . Таким чином, для розрахунку системи (18) досить мати тільки розрахунок статичної моделі гідродинаміки теплоносіїв.

Другим спрощенням, широко застосовуваним на практиці моделювання поверхонь теплообміну, є використання точкової моделі плоскої стінки. Допустимість такої заміни детально аналізувалася при розрахунках динаміки в [5, 6]. У статисти точкова модель плоскої стінки може давати значні похибки, тому для аналізу статичної краще використовувати розподілену модель циліндричної стінки або точкову модель з коефіцієнтом теплопередачі циліндричної стінки.

При переході до точкової моделі плоскої стінки динамічна модель теплових процесів набуде вигляду:

$$\begin{cases} V_1 \rho_1 \frac{\partial i_1}{\partial t} + (-1)^H D_1 \frac{\partial i_1}{\partial z_H} = -\alpha_1 H (\theta_1 - \vartheta_1) - k^{ef} q_p H_1, \\ \rho_M c_M \delta \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = k^{ef} q_p + \alpha_1 (\theta_1 - \vartheta_1) - \alpha_2 (\vartheta_2 - \theta_2), \\ V_2 \rho_2 \frac{\partial i_2}{\partial t} + D_2 \frac{\partial i_2}{\partial z_H} = \alpha_2^{екв} H (\vartheta_2 - \theta_2). \end{cases}$$

Тут  $\alpha_2^{екв} = \frac{\alpha_2 H_2}{H} = \frac{\alpha_2 H_2}{H_1}$  – еквівалентний коефіцієнт тепловіддачі

введений для того, щоб в розрахунках використовувати тільки зовнішню площу поверхні труб  $H = H_1$ .

Наступним, дуже важливим спрощенням, що дозволяє отримувати не тільки чисельні, але і аналітичні рішення, є перехід до моделі лінійного наближення. Запишемо цю модель при припущеннях про сталість значень  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $c_{P1}$ ,  $c_{P2}$ ,  $\lambda$ ,  $\rho_M$  і  $c_M$ . У попередньому розділі отримані моделі лінійного наближення, використаємо ці розв'язки з врахуванням можливості різних схем руху теплоносіїв в теплообмінниках:

$$\begin{cases} \tau_1 \frac{\partial \Delta i_1}{\partial t} + (-1)^H \frac{\partial i_1}{\partial z_H} + St_1 \Delta i_1 = \\ \quad = -k_{D1}^{ef} \frac{H_1}{D_1} \Delta q_p + St_1 c_{P1} \Delta \vartheta + k_{D1} \Delta D_1, \\ T_M \frac{\partial \Delta \vartheta}{\partial t} + \Delta \vartheta = k^{ef} \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2^{екв}} \Delta q_p + k_1 \Delta \theta_1 + k_2 \Delta \theta_2, \\ \tau_2 \frac{\partial \Delta i_2}{\partial t} + \frac{\partial \Delta i_2}{\partial z_H} + St_2 \Delta i_2 = St_2 c_{P2} \Delta \vartheta - k_{D2} \Delta D_2. \end{cases} \quad (19)$$

Тут  $\tau_1 = \frac{V_1 \rho_{10}}{D_{10}}$ ,  $\tau_2 = \frac{V_2 \rho_{20}}{D_{20}}$  – постійні часу, рівні часу проходження

речовини по трубі;  $St_1 = \frac{\alpha_1 H}{c_{P1} D_{10}}$ ,  $St_2 = \frac{\alpha_2^{екв} H}{c_{P2} D_{20}}$  – числа Стентона потоків;

$k_{D1} = -\left(\frac{\partial i_1}{\partial z_H}\right)_0 \frac{(-1)^H}{D_{10}} = \frac{(q_{10} + k^{ef} q_p) H}{D_{10}^2}$ ,  $k_{D2} = \left(\frac{\partial i_1}{\partial z_H}\right)_0 \frac{1}{D_{20}} = \frac{q_{20} H_2}{D_{20}^2}$  – коефі-

цієнти при витратах зовнішнього і внутрішнього потоків (позитивні

величини);  $T_M = \frac{\rho_M c_M \delta}{\alpha_1 + \alpha_2^{екв}}$  – постійна часу металу труб;  $k_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2^{екв}}$ ,

$k_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2^{екв}}$  – коефіцієнти посилення.



Надалі буде детально розглянуто отримання динамічних характеристик лінійних моделей різних теплообмінників щодо температур теплоносіїв, тому запишемо систему (19) через температури, замінивши приріст ентальпії потоку  $\Delta i$  на добуток теплоємності і збільшення температури  $c_P \Delta \theta$ :

$$\begin{cases} \tau_1 \frac{\partial \Delta \theta_1}{\partial t} + (-1)^H \frac{\partial \theta_1}{\partial z_H} + St_1 \Delta \theta_1 = \\ \quad = -k^{e\Phi} \frac{St_1}{\alpha_1} \Delta q_p + St_1 \Delta \vartheta + k_{D1} \Delta D_1, \\ T_M \frac{\partial \Delta \vartheta}{\partial t} + \Delta \vartheta = k^{e\Phi} \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2^{eKB}} \Delta q_p + k_1 \Delta \theta_1 + k_2 \Delta \theta_2, \\ \tau_2 \frac{\partial \Delta \theta_2}{\partial t} + \frac{\partial \Delta \theta_2}{\partial z_H} + St_2 \Delta \theta_2 = St_2 \Delta \vartheta - k_{D2} \Delta D_2, \end{cases} \quad (20)$$

де коефіцієнти при витратах знаходяться за формулами

$$k_{D1} = - \left( \frac{\partial \theta_1}{\partial z_H} \right)_0 \frac{(-1)^H}{D_{10}} = \frac{(q_{10} + k^{e\Phi} q_p) H}{c_{P1} D_{10}^2};$$

$$k_{D2} = \left( \frac{\partial \theta_2}{\partial z_H} \right)_0 \frac{1}{D_{20}} = \frac{H_2 q_{20}}{c_{P2} D_{20}^2}.$$

### Моделі статички теплообмінників

Для отримання статичних характеристик, як уже зазначалося, доцільно використовувати розподілені моделі теплопередаючої стінки, тому в якості вихідної візьмемо модель (18), поклавши рівними нулю похідні за часом [5, 6]:

$$\begin{cases} (-1)^H D_1 \frac{\partial i_1}{\partial z_H} = -\alpha_1 H (\theta_1 - \vartheta_1) - k^{e\Phi} q_p H, \\ \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} = 0, \\ D_2 \frac{\partial i_2}{\partial z_H} = \alpha_2^{eKB} H (\vartheta_2 - \theta_2), \end{cases} \quad (21)$$

з граничними умовами

$$\left( \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)_{y=\delta} = \frac{\alpha_1}{\lambda} (\theta_1 - \vartheta_1) + k^{e\Phi} q_p,$$

$$\left( \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{\alpha_2^{eKB}}{\lambda} (\vartheta_2 - \theta_2).$$

Модель статички для температур потоків запишемо при припущенні про незалежність теплоємностей теплоносіїв від зміни тиску і температури по довжині  $c_P(z) = \text{const}$  і сталості параметрів стінки  $\rho_m = \text{const}$ ,  $c_m = \text{const}$ ,  $\lambda = \text{const}$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} (-1)^H c_{P1} D_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial z_H} = -\alpha_1 H (\theta_1 - \vartheta_1) - k^{\text{ef}} q_p H, \\ \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} = 0, \\ c_{P2} D_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial z_H} = \alpha_2^{\text{екв}} H (\vartheta_2 - \theta_2), \end{array} \right. \quad (22)$$

з граничними умовами

$$\left( \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)_{y=\delta} = \frac{\alpha_1}{\lambda} (\theta_1 - \vartheta_1) + k^{\text{ef}} q_p, \quad \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{\alpha_2^{\text{екв}}}{\lambda} (\vartheta_2 - \theta_2).$$

В результаті розв'язку моделі статички повинно бути отримано розподіл температур (ентальпій) потоків по довжині при заданих значеннях витрат  $D_1$ ,  $D_2$ , питомого радіаційного потоку  $q_p$  і температур (ентальпії) потоків на вході  $\theta_1^{\text{BX}}$ ,  $\theta_2^{\text{П}}$ :

$$\begin{aligned} \theta_1(z) &= f_1(D_1, D_2, q_p, \theta_1^{\text{BX}}, \theta_2^{\text{П}}, z), \\ \theta_2(z) &= f_2(D_1, D_2, q_p, \theta_1^{\text{BX}}, \theta_2^{\text{П}}, z), \end{aligned}$$

де  $\theta_1^{\text{BX}} = \theta_1(z=0) = \theta_1^{\text{П}}$  – для прямотока і  $\theta_1^{\text{BX}} = \theta_1(z=1) = \theta_1^K$  – для протитоку.

### **Розподілена статична модель конвективного теплообмінника з однофазними теплоносіями**

В системі (22) для даного теплообмінника питомий радіаційний потік слід покласти рівним нулю  $q_p = 0$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} (-1)^H c_{P1} D_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial z_H} = -\alpha_1 H (\theta_1 - \vartheta_1), \\ \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} = 0, \\ c_{P2} D_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial z_H} = \alpha_2^{\text{екв}} H (\vartheta_2 - \theta_2). \end{array} \right.$$

Використовуючи для зручності запису числа Стентона потоків, отримаємо математичну модель статички конвективного теплообмінника з однофазними теплоносіями:

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta_1}{\partial z_H} = -(-1)^H \text{St}_1(\theta_1 - \vartheta_1), \\ \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} = 0, \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial z_H} = \text{St}_2(\vartheta_2 - \theta_2), \end{cases} \quad (23)$$

з граничними умовами

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right)_{y=\delta} = \frac{\alpha_1}{\lambda} (\theta_1 - \vartheta_1), \quad \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{\alpha_2^{\text{екв}}}{\lambda} (\vartheta_2 - \theta_2).$$

Рівняння енергії теплоносіїв містять значення температур стінки на границях  $\vartheta_1(z)$  і  $\vartheta_2(z)$ , тому розв'язок системи почнемо з розв'язку рівняння енергії стінки. Після інтегрування по координаті  $y$  отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} &= C_1; \\ \vartheta(z, y) &= C_1 y + C_2. \end{aligned}$$

Постійні інтегрування визначимо з граничних умов:

для  $y = 0$ :

$$\begin{aligned} \vartheta(z, 0) &= C_2 = \vartheta_2, \\ \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right)_{y=0} &= C_1 = \frac{\alpha_2^{\text{екв}}}{\lambda} (\vartheta_2 - \theta_2), \end{aligned}$$

для  $y = \delta$ :

$$\begin{aligned} \vartheta(z, \delta) &= C_1 \delta + C_2 = \vartheta_1, \\ \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right)_{y=\delta} &= C_1 = \frac{\alpha_1}{\lambda} (\theta_1 - \vartheta_1). \end{aligned}$$

В отриманій системі рівнянь граничних умов чотири невідомі величини  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $\vartheta_1$  і  $\vartheta_2$ , щодо яких її необхідно розв'язати. З рівнянь для температури  $\vartheta$  отримаємо

$$C_1 = (\vartheta_1 - \vartheta_2)/\delta.$$

Підставимо цей вираз в рівняння для похідної  $\partial\vartheta/\partial y$ , обчисливши їх відносно температур стінки  $\vartheta_1$  і  $\vartheta_2$ :

$$\begin{cases} \vartheta_1 = \left(1 + \frac{\delta\alpha_2^{\text{екв}}}{\lambda}\right) \vartheta_2 - \frac{\delta\alpha_2^{\text{екв}}}{\lambda} \theta_2, \\ \vartheta_2 = \left(1 + \frac{\delta\alpha_1}{\lambda}\right) \vartheta_1 - \frac{\delta\alpha_1}{\lambda} \theta_1. \end{cases} \quad (24)$$

Звідки знаходимо кінцеві формули для температур стінки на зовнішній і внутрішній поверхнях [5, 6]:

$$\begin{cases} \vartheta_1 = K \left[ \left( \frac{1}{\alpha_2^{\text{екв}}} + \frac{\delta}{\lambda} \right) \theta_1 + \frac{1}{\alpha_1} \theta_2 \right], \\ \vartheta_2 = K \left[ \frac{1}{\alpha_2^{\text{екв}}} \theta_1 + \left( \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} \right) \theta_2 \right], \end{cases} \quad (25)$$

де  $K = \left( \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2^{\text{екв}}} \right)^{-1}$  – коефіцієнт теплопередачі.

Рівняння енергії теплоносіїв в системі (23) перетворимо по Лапласу

$$\begin{cases} [s + (-1)^H \text{St}_1] \theta_1(s) = \theta_1^\Pi + (-1)^H \text{St}_1 \vartheta_1(s), \\ [s + \text{St}_2] \theta_2(s) = \theta_2^\Pi + \text{St}_2 \vartheta_2(s), \end{cases}$$

підставимо в них отримані вирази для  $\vartheta_1$ ,  $\vartheta_2$  і після деяких перетворень отримаємо розв'язок для відображення температур потоків:

$$\begin{cases} \theta_1(s) = \frac{1}{s + (-1)^H K \cdot \text{St}_1 / \alpha_1} \theta_1^\Pi + \frac{(-1)^H K \cdot \text{St}_1 / \alpha_1}{s + (-1)^H K \cdot \text{St}_1 / \alpha_1} \theta_2(s), \\ \theta_2(s) = \frac{1}{s + K \cdot \text{St}_2 / \alpha_2^{\text{екв}}} \theta_2^\Pi + \frac{K \cdot \text{St}_2 / \alpha_2^{\text{екв}}}{s + K \cdot \text{St}_2 / \alpha_2^{\text{екв}}} \theta_1(s), \end{cases}$$

або в компактному вигляді:

$$\begin{cases} \theta_1(s) = W_1(s)\theta_1^\Pi + aW_1(s)\theta_2(s), \\ \theta_2(s) = W_2(s)\theta_2^\Pi + bW_2(s)\theta_1(s), \end{cases} \quad (26)$$

де  $W_1(s) = \frac{1}{s+a}$  та  $W_2(s) = \frac{1}{s+b}$  – функції передачі потоків в статиці;  
 $a = (-1)^H \frac{K \cdot St_1}{\alpha_1} = (-1)^H \frac{K \cdot H}{c_{P1} D_1}$  та  $b = \frac{K \cdot St_2}{\alpha_2^{екв}} = \frac{K \cdot H}{c_{P2} D_2}$  – постійні коефіцієнти.

На рис. 17. показано сигнальний граф системи, що полегшує пошук рішення для розподілу температур потоків [5, 6].

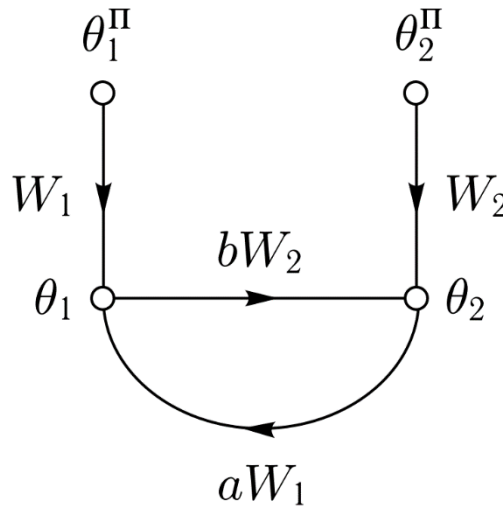


Рис. 17. Сигнальний граф рівнянь (26) статики

Отже, для зображення температури внутрішнього теплоносія маємо

$$\theta_2(s) = \frac{bW_1W_2 \cdot \theta_1^\Pi + W_2 \cdot \theta_2^\Pi}{1 - abW_1W_2} = \frac{b\theta_1^\Pi + W_1^{-1}\theta_2^\Pi}{W_1^{-1}W_2^{-1} - ab} = \frac{b\theta_1^\Pi + (s+a)\theta_2^\Pi}{s[s + (a+b)]},$$

і застосовуючи зворотне перетворення Лапласа, отримаємо розподіл по довжині температури внутрішнього теплоносія в статиці

$$\theta_2(z) = \frac{b}{a+b} [1 - e^{-(a+b)z}] \theta_1^\Pi + \frac{a}{a+b} \left[1 + \frac{b}{a} e^{-(a+b)z}\right] \theta_2^\Pi. \quad (27)$$

Аналогічно отримуємо розв'язок для зовнішнього теплоносія:

$$\theta_1(z) = \frac{b}{a+b} \left[1 + \frac{a}{b} e^{-(a+b)z}\right] \theta_1^\Pi + \frac{a}{a+b} [1 - e^{-(a+b)z}] \theta_2^\Pi. \quad (28)$$

При необхідності можна знайти розв'язки для  $\vartheta_1(z)$  і  $\vartheta_2(z)$  за формулами (27), (28) і рівнянням зв'язку (25).

Обчислення розподілу температур теплоносіїв не викликає труднощів для проточної схеми руху теплоносіїв. Для цього досить задати значення вхідних впливів  $\theta_1^\Pi$ ,  $\theta_2^\Pi$ ,  $D_1$ ,  $D_2$ , теплофізичних і конструктивних параметрів.

У протиточній схемі руху теплоносіїв задані граничні умови  $\theta_2(z=0) = \theta_2^\Pi$  для внутрішнього теплоносія та  $\theta_1^{\text{BX}} = \theta_1(z=1) = \theta_1^K$  – для зовнішнього. Значення  $\theta_1^\Pi$  невідомо. В цьому випадку єдиною можливістю є ітераційний спосіб розв'язку рівнянь (27) та (28). Спочатку задаються довільним значенням  $\theta_1^\Pi$  і вирішують рівняння (28). Отримане в результаті обчислень значення  $\theta_1^K$  порівнюють із заданою вхідною температурою  $\theta_1^{\text{BX}}$ . Якщо виявилось, наприклад, що  $\theta_1^K < \theta_1^{\text{BX}}$ , то значення  $\theta_1^\Pi$  збільшують і знову проводять розрахунок. Ітерації виконують до тих пір, поки  $\theta_1^K$  буде мінімально відрізнятися від  $\theta_1^{\text{BX}}$ .

Розподіл температур прямого (а) і протиточного (б) теплообмінника показаний на графіках  $\theta_1(z)$  і  $\theta_2(z)$  рис. 18.

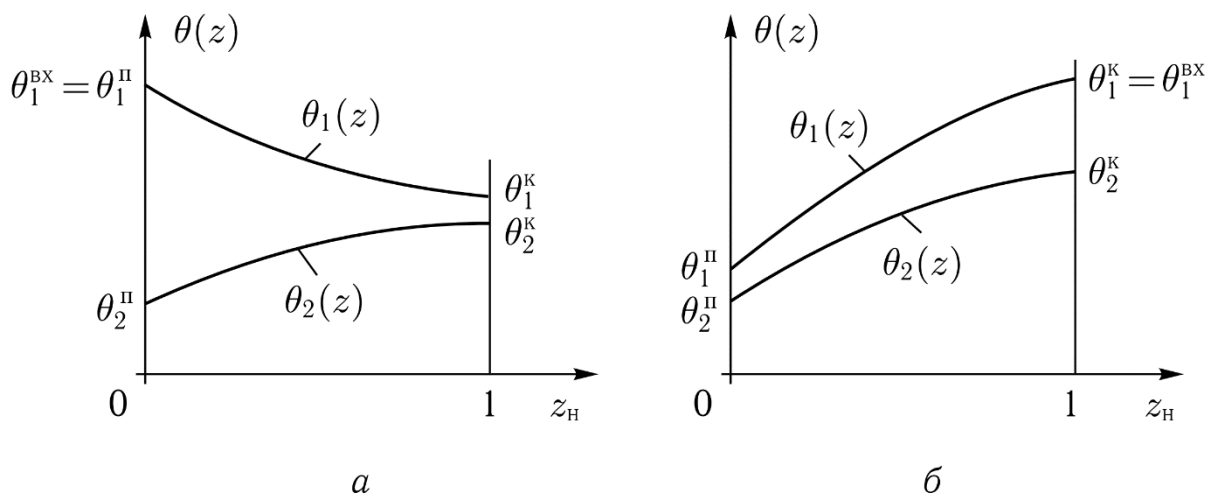


Рис.18. Розподіл температур прямого (а) і протиточного (б) теплообмінника

З отриманих в даному параграфі результатів можна зробити важливий практичний висновок: структура формул розподілу по довжині температур (27), (28) в статиці не залежить від прийнятої моделі стінки. Вплив моделі стінки відбивається на розподілі лише через вираз для коефіцієнта

теплопередачі  $K$ . Таким чином, при виведенні рівнянь статичного розподілу температур можна взяти будь-яку (в тому числі і точкову) модель стінки, але в отримане рішення підставити значення коефіцієнта теплопередачі циліндричної стінки. Нагадаємо, що коефіцієнт теплопередачі в залежності від прийнятої моделі стінки (циліндрична розподілена, плоска розподілена або точкова) обчислюється за формулами:

$$K_{\text{цил}} = \left( \frac{1}{\alpha_1} + \frac{r_1}{r_2} \frac{1}{\alpha_2} + \frac{r_1}{\lambda} \ln \left( \frac{r_1}{r_2} \right) \right)^{-1};$$

$$K_{\text{пл}} = \left( \frac{1}{\alpha_1} + \frac{r_1}{r_2} \frac{1}{\alpha_2} + \frac{\delta}{\lambda} \right)^{-1};$$

$$K_{\text{зп}} = \left( \frac{1}{\alpha_1} + \frac{r_1}{r_2} \frac{1}{\alpha_2} \right)^{-1}.$$

#### **Модель статички конвективного теплообмінника із зовнішнім теплоносієм на лінії насичення**

Як зазначалося раніше, ізобарна теплоємність теплоносія, що знаходиться на лінії насичення, дорівнює нескінченності  $c_{p1} = \infty$ , отже, число Стентона  $St_1 = 0$  і рівняння енергії вироджується в рівняння  $\theta_{1s}(z) = \text{const}$ .

Тому математична модель такого теплообмінника буде складатися з двох диференціальних рівнянь – рівняння енергії внутрішнього теплоносія і рівняння теплопровідності стінки

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta_2}{\partial z_{\text{н}}} = St_2(\vartheta_2 - \theta_2), \\ \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} = 0, \end{cases} \quad (29)$$

з граничними умовами

$$\left( \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)_{y=\delta} = \frac{\alpha_1}{\lambda} (\theta_{1s} - \vartheta_1), \quad \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{\alpha_2^{\text{екв}}}{\lambda} (\vartheta_2 - \theta_2).$$

В розв'язок системи (26) для відображення температури внутрішнього теплоносія  $\theta_2(s)$ , отриманого для конвективного теплообмінника з однофазними теплоносіями,

$$\theta_2(s) = \frac{1}{s + K St_2 / \alpha_2^{\text{екв}}} \theta_2^{\text{п}} + \frac{K St_2 / \alpha_2^{\text{екв}}}{s + K St_2 / \alpha_2^{\text{екв}}} \theta_1(s)$$

замість  $\theta_1(s)$  слід підставити відображення по Лапласу температури насичення  $\theta_{1s}(s)$ , зважаючи на сталість цієї температури по довжині  $z$ :

$$\theta_{1s}(s) = \frac{\theta_{1s}}{s},$$

де  $\theta_{1s}$  – число.

Підставимо цей вираз в розв'язок для відображення  $\theta_2(s)$ :

$$\begin{aligned} \theta_2(s) &= \frac{1}{s + K St_2 / \alpha_2^{\text{екв}}} \theta_2^{\text{п}} + \frac{K St_2 / \alpha_2^{\text{екв}}}{s(s + K St_2 / \alpha_2^{\text{екв}})} \theta_{1s} = \\ &= \frac{1}{s + b} \theta_2^{\text{п}} + \frac{b}{s(s + b)} \theta_{1s}, \end{aligned}$$

й виконаємо зворотнє перетворення Лапласа:

$$\theta_2(z) = (1 - e^{-bz}) \theta_{1s} + e^{-bz} \theta_2^{\text{п}}. \quad (30)$$

Аналогічний результат ми отримали б, якби в розв'язок (27) конвективного теплообмінника з однофазними теплоносіями підставили  $a = 0$  (так як  $St_1 = 0$ ).

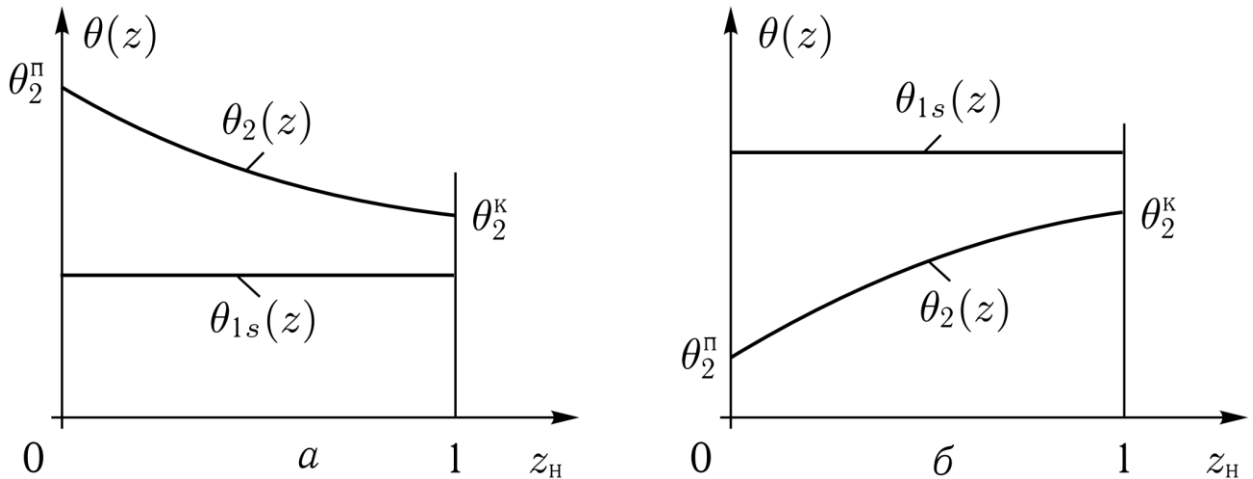


Рис. 19. Розподіл температур конвективного теплообмінника із зовнішнім теплоносієм на лінії насичення. Для внутрішнього гріючого теплоносія ( $a$ ) та для зовнішнього гріючого теплоносія ( $b$ )

Приблизний вид графіків розподілу температур відповідно до (30) показаний на рис. 19 для випадку  $a$ ), коли гріючим є внутрішній теплоносій (наприклад, для парогенератора блоку) і для випадку  $b$ ), коли внутрішній



теплоносії нагрівається (наприклад, для підігрівачів регенеративної системи ТЕС і АЕС).

### Розподілена статична модель радіаційного теплообмінника

Особливістю моделювання радіаційних теплообмінників, а також котлів є можливість приймати припущення про незалежність величини радіаційного потоку  $q_p$  від температури зовнішньої поверхні стінки  $\vartheta_1$  з-за значної відмінності температур (четвертих степенів) зовнішнього теплоносія і стінки в рівнянні Стефана-Больцмана

$$q_p = f [(\theta_1 + 273)^4 - (\vartheta_1 + 273)^4].$$

У такому випадку для визначення розподілу температури  $\theta_2(z)$  (або ентальпії) досить розглянути рівняння енергії внутрішнього теплоносія і стінки:

$$\begin{cases} D_2 c_{P2} \frac{\partial \theta_2}{\partial z_H} = H q_2, \\ \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} = 0, \end{cases} \quad (31)$$

з граничними умовами

$$\left( \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)_{y=\delta} = k^{\text{еф}} q_p, \quad \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{1}{\lambda} \alpha_2^{\text{екв}} (\vartheta_2 - \theta_2) = \frac{1}{\lambda} q_2.$$

Враховувши, що в статиці тепловий потік всередині плоскої стінки постійний по координаті  $y$  (див. попер. розділ)

$$q(y) = \text{const} = k^{\text{еф}} q_p = q_2,$$

і замінивши в правій частині рівняння енергії теплоносія питомий тепловий потік на внутрішній поверхні стінки  $q_2$  на тепловий потік на зовнішній поверхні  $k^{\text{еф}} q_p$ :

$$D_2 c_{P2} \frac{\partial \theta_2}{\partial z_H} = k^{\text{еф}} H q_p.$$

Після інтегрування рівняння отримаємо шукану залежність для розподілу температури внутрішнього теплоносія в статиці:

$$\theta_2(z) = \theta_2^{\Pi} + \frac{k^{\text{еф}} H}{D_2 c_{P2}} q_p z_H. \quad (32)$$

Незалежно від розв'язку для температури теплоносія в трубах  $\theta_2(z)$  можна знайти розподіл по довжині температури зовнішнього теплоносія з його рівняння енергії

$$(-1)^H D_1 c_{P1} \frac{\partial \theta_1}{\partial z_H} = -k^{ef} H q_p.$$

Після інтегрування цього рівняння отримаємо

$$\theta_1(z) = \theta_1^H - (-1)^H \frac{k^{ef} H}{D_1 c_{P1}} q_p z_H. \quad (33)$$

На рис. 20 наведені графіки розподілу температур теплоносіїв радіаційного теплообмінника для залежностей (32) та (33).

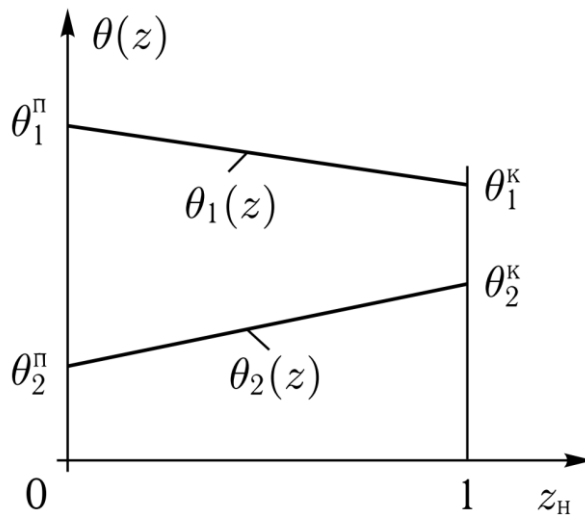


Рис. 20. Графіки розподілу температур теплоносіїв радіаційного теплообмінника

## **Висновки**

Навчальний посібник «Математичне моделювання теплових процесів в енергетиці та промисловості ч.1», зробивши акцент на теоретичних задачах енергетичної галузі, знайомить читачів з основними підходами до моделювання теплових процесів. Зокрема розглядаються загальні принципи моделювання, основи теорії аналітичних моделей, етапи створення аналітичних моделей. Значний об'єм матеріалу присвячено розгляду моделей з різним ступенем наближення, статичним та динамічним характеристикам моделей теплових процесів потоку та стінки теплообмінників. Наведено порівняння моделей різного ступеня наближення. Показано узагальнену математичну модель теплообмінника. Докладно розглянуто моделі статички теплообмінників.

Звичайно, даний навчальний посібник не може дати повний об'єм знань з аналітичного моделювання теплових процесів в енергетиці, однак, наявна в ньому інформація досить повно відображає всі головні завдання дисципліни, демонструє основні способи їх вирішення.

Після вивчення матеріалів даного посібника, аспірант або будь-яка інша людина, що вивчає дану дисципліну, отримає достатній обсяг знань, необхідних для вирішення досить серйозних прикладних задач енергетичної галузі. Також посібник забезпечений списком літератури, в якому будь-який бажаючий може знайти більш повну, спеціалізовану інформацію по прикладним питанням даної дисципліни.

В наступній частині навчального посібника «Математичне моделювання теплових процесів в енергетиці та промисловості ч.2» буде докладно розглянуто динамічні моделі теплових процесів на прикладі конвективних та радіаційних теплообмінних апаратів енергетичної галузі.

## Список літератури

1. Духанов, А. В. Имитационное моделирование сложных систем: курс лекций / А. В. Духанов, О. Н. Медведева; Владим. гос. ун-т. – Владимир: Изд-во Владим. гос. ун-та, 2010. – 115 с.
2. Построение математических моделей химико-технологических объектов / Под ред. Е. Г. Дудникова. Л.: Химия, 1970.
3. Протопопов И. И., Пащенко Ф. Ф. Компьютерное моделирование биотехнических систем. Учебное пособие. М.: МГУ ПБ, 2003, ч. 1. — 124 с.
4. Пащенко Ф. Ф. Введение в состоятельные методы моделирования систем. Ч. 1. Математические основы моделирования систем. М.: Финансы и статистика, 2006, 328 с.
5. Пащенко Ф. Ф., Пикина Г. А. Основы моделирования энергетических объектов / Грант РФФИ 12-08-07128. М.: Физматлит, 2011.
6. Пикина Г. А. Математические модели технологических объектов: Учебное пособие. М.: Издательский дом МЭИ, 2002.
7. Имаев Д.Х., Ковальски З., Яковлев В.Б., Кузьмин Н.Н., Пошихонов Л.Б., Цапко Г.П. Анализ и синтез систем управления. Теория. Методы. Примеры решения типовых задач с использованием персонального компьютера. С.-Петербург, Гданьск, Сургут, 1998, 247 с.
8. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навчальний посібник. — К.: А.С.К., 2001. – 648 с.
9. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 1, 2 – М.: Наука, 1985. – 580 с., 602 с.
10. Чермак И., Петерка В., Заворка И. Динамика регулируемых систем в теплоэнергетике и химии. М.: Мир, 1972.
11. Нормативный метод расчета динамических характеристик прямоточных котлов. Котельные и турбинные установки энергоблоков мощностью 500 и 800 МВт / Под ред. В. Е. Дорощука. М.: Энергия, 1979.
12. Серов Е. П., Корольков Б. П. Динамика парогенераторов. М.: Энергоиздат, 1984.
13. Беляев Г. Б., Сабанин В. Р. Принципы математического моделирования теплоэнергетических объектов: Учебное пособие. М.: Изд-во МЭИ, 1986.

14. *Пикина Г. А.* Математические модели технологических объектов / Учебное пособие. М.: Издательский дом МЭИ, 2007. 300 с.
15. Тепло и массообмен. Теплотехнический эксперимент: Справочник / Под общ. ред. В. А. Григорьева и В. М. Зорина. М.: Энергоиздат, 1982.
16. *Пашков Л. Т.* Математические модели процессов в паровых котлах. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.
17. *Donne M., Pike A., Savry R.* Power Plant Simulation and Control // IEE Computing and Control Journal, Apr. 2001.
18. *Eborn J., Nilsson B.* Simulation of a Thermal Power Plant Using an Object-Oriented Model Database // Proceedings of the 13th IFAC World Congress, San-Francisco, USA, 1996.